FURTHER PROGRESS IN NONLINEAR ACCELARATION THEORY FOR CYCLOTRONS

Kenji Sato^{1,A)}, Shiro Ninomiya^{A)}, Nobumasa Miyawaki^{B)}, Mitsuhiro Fukuda^{B)}, Shuji Obata^{C)}

^{A)} Research Center for Nuclear Physics, Osaka Univ., Mihogaoka 10-1, Ibaraki, Osaka 567-0047, JAPAN

^{B)}Advanced Radiation Technology Center, JAERI, Watanuki-cho 1233, Takasaki , Gunma 370-1291, JAPAN

^{C)} School of Science and Engineering, Tokyo Denki Univ., Ishizaka, Hatoyama-cho, Hiki, Saitama 350-0311, JAPAN

Abstract: It is possible to transform three equations of motion into a convenient form which is expressed by terms up to 2^{nd} differential of variables of the Lorentz factor and angular velocity by the use of a field index of magnetic field distribution. The expression plays a vital role in a two-step nonlinear acceleration theory of spiral orbital motions in cyclotrons because this one and only equation of motion refers to both longitudinal motion and transverse motion.

サイクロトロンの非線形加速理論の新たな展開

1. はじめに

サイクロトロンの二段階構成の非線形加速理論の 第一段階では、渦巻き状軌道を描きながら加速され て行くときの特殊な運動を仮想的な基準の運動とし て想定し、仮想的な基準としての高周波加速電圧の 周波数と振幅を与え、特殊な運動を実現出来る仮想 的な基準としての磁場分布を求める。第二段階では、 磁場分布と加速電圧の周波数と振幅が仮想的な基準 からずれているとして、任意の粒子の運動を、仮想 的な基準の運動からのずれとして、縦方向ずれ運動 と横方向ずれ運動とに分離して求める。このとき、 縦方向ずれ運動はエネルギーのずれの非線形関数と して求め、これより、サイクロトロンでの加速運動 の全てを知ることが出来るようになる。この枠組み は、著者の一人(K.S.)による、日本加速器学会誌 「加速器」第一巻第二号の解説[1]と同じである。

ところで、縦方向ずれ運動では、エネルギーと角 速度と位相と動径の四つの変量がゆっくりと円滑に 低速で変化するのに対して、横方向ずれ運動では、 角速度と位相と動径の三つの変量が忙しく高速で変 化し、エネルギーは縦方向ずれ運動で定まる低速の 変化のみとする。このような分離が出来る理由は、 横方向ずれ運動では位相が忙しく高速で変化し、加 速や減速が繰り返されるので、高速で相殺され、エ ネルギーは変化しないと考えて良いからである。

ところで、縦方向ずれ運動は、例えば、シンクロ トロン振動と言う加速理論に代表されるように、エ ネルギーと位相の二つの変量のみからなる連立の微 分方程式の解として与えられる。このとき、横方向 ずれ運動では位相が忙しく高速で変化することに着 目すると、その運動方程式は、エネルギーと位相の 二つの変量と、特に、位相の高階微分を含む形にな ると考えられる。従って、縦方向ずれ運動も横方向 ずれ運動も、二つの運動に共通な一つの運動方程式 の解になるべきであると考えられる。 簡単のため、円柱座標系で、磁場は動径のみの関 数とし、波乗り加速であると言うモデルと仮定を採 用し、元々の運動方程式を、全く近似することなく、 変形し整理したところ、エネルギーに等価なローレ ンツ因子と、位相の変化率に等価な角速度の二つの 変量、及び、これらの高階微分のみを含む運動方程 式が、厳密なものとして、今回、新たに求まった。

この点、「加速器」第一巻第二号[1]では、動径 とその高階微分からなる運動方程式を取り扱い、そ の結果、ローレンツ因子と角速度、及び、これらの 高階微分からなる運動方程式は、近似を多用して得 られている。そのため、近似の是非など、筆者自身 (K.S.)も混乱していたが、今回の新たな展開は簡 明であり、理解し易く、混乱の少ないものになった。

しかし、第一段階と第二段階との全てを解き切る には、なおも、一つ、式が足りないことが判明した。 上に求めたローレンツ因子と角速度、及び、これら の高階微分からなる運動方程式には磁場分布が含ま れており、元々、動径のみの関数である磁場分布を、 これらの変量で記述する必要があった。この問題は、 動径の関数である磁場分布のフィールド・インデッ クスが定数であるとすることにより解決出来た。そ の結果、新たな解法と、動径の運動を出発点とした 以前の解法との接点が明らかになったと言える。

さて、渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く 場合、粒子は、加速間隙を、斜めに、その電場の方 向とは異なる方向に横切る。このとき、加速に寄与 しない方向の電場は、粒子を水平面内でキックし、 これは、磁場が粒子を偏向させるのと同じ効果であ る。このように、粒子の偏向は磁場と電場の二つの 効果で定まり、前以って一方を既知の量として与え ることが出来ない。こうした不定要因があっても、 運動方程式の形式として、両者の効果を含む実効的 磁場分布を定義してやれば良いことが分かった。 この論文では、以上に述べた手順を示す。

¹ E-mail: sato@rcnp.osaka-u.ac.jp

2. 元々の運動方程式

独立変数を回転数とするときの運動方程式は、 「加速器」第一巻第二号[1]と同じく五つとする。

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_{rf}}{h} \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi h}\phi'} \tag{1}$$

$$\gamma' = \frac{q}{m_0 c^2} V \cos\phi \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = c \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4\pi^2} r'^2}}$$
(3)

$$\gamma \dot{\theta} - \frac{1}{4\pi^2} \gamma' \dot{r}' \dot{\theta} - \frac{1}{4\pi^2} \gamma r'' \dot{\theta} - \frac{1}{4\pi^2} \gamma r'' \dot{\theta}'$$

$$= -\frac{q}{m \dot{\theta}} E_r + r\omega_B \qquad (4)$$

$$m_0 \theta 2\gamma r' \dot{\theta} + \gamma' r \dot{\theta} + \gamma r \dot{\theta}' = \frac{2\pi q}{m_0 \dot{\theta}} E_{\theta} + r' \omega_B$$
(5)

知りたい変量は $\dot{\theta}$ 、 ϕ 、 γ 、rの四つなので、解 くべき式も四つで良く、(4)式を捨てることにする。 ここで、加速は電場で行われることを示すため、 (4)式×r'-(5)式×rを計算し、 ω_{B} の項を消去する。

$$\gamma' = \frac{q}{m_0 c^2} \left(r' E_r + 2\pi r E_\theta \right) \tag{6}$$

3. 接線方向の電場及び法線方向の電場

粒子の進行方向である接線方向の電場を E_t とし、 進行方向に垂直な法線方向の電場を E_n とする。こ れらの電場と、動径方向の電場と方位角方向との電 場との間には、以下の関係が成立する。ただし、sは粒子の進行方向の距離であり、s'はsの回転数に よる微分である。なお、sは進行方向の速度である。

$$E_r = r' \frac{E_t}{s'} + 2\pi r \frac{E_n}{s'} \tag{7}$$

$$E_{\theta} = 2\pi r \frac{E_t}{s'} - r' \frac{E_n}{s'} \tag{8}$$

これらの式を(6)式に代入すると、接線方向の電場が、(2)式で与えられている γ' で定まる。

$$\frac{q}{m_0 \dot{\theta}} \frac{E_t}{s'} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma' \theta}{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \tag{9}$$

当然のこととは言え、法線方向の電場を直接決め る式がないことが分かる。

4. 実効的磁場分布

法線方向の電場は磁場と同じく偏向の効果を持つ ので、その効果が入った実効的磁場分布を定義する。

$$\omega_B^{eff} = \omega_B - \frac{q}{m_0 \dot{\theta}} \frac{E_n}{s'} \tag{10}$$

(5)式の方位角方向の運動方程式に(9)式と(10)式 を代入すると、実効的磁場分布を含む式を得る。

1

$$2\gamma r'\dot{\theta} - \gamma' r\dot{\theta} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma^2}} - 1 \right] + \gamma r \dot{\theta}' = r' \omega_B^{eff}$$
(11)

この(11)式で、r'がrに比例する形に書けるので、 (3)式と連立させると、 $r \ge r'$ のそれぞれが求まる。

$$r = \frac{c}{\dot{\theta}} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\left(2\gamma\dot{\theta} - \omega_B^{eff}\right)^2} \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^2}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}'\right)^2}} \left(12\right)$$

$$r' = \frac{c}{\dot{\theta}} \frac{\frac{1}{2\gamma\dot{\theta} - \omega_B^{eff}} \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^2}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}'\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}} \left(13\right)$$

$$r' = \frac{c}{\dot{\theta}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\left(2\gamma\dot{\theta} - \omega_B^{eff}\right)^2} \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^2}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}'\right)^2}} \left(13\right)$$

5. 加速間隙での電場の向きの影響

加速間隙での電場の向きを係数αで表す。

$$E_{gapr} = \alpha E_{gap\theta}$$
 (14)
この向きと、(7)式と(8)式の左辺にある、動径方

向と方位角方向の電場の向きとが一致するとする。 $E_r = \alpha E_{\theta}$ (15)

この(15)式から(7)式と(8)式との関係が定まり、 (12)式のrと(13)式のr'を代入すると、接線方向の 電場と実効的磁場分布と裸の磁場分布の関係を得る。

$$2\pi \frac{q}{m_{0}\dot{\theta}} \frac{E_{n}}{s'} = \omega_{B} - \omega_{B}^{eff} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^{2}}} \frac{\alpha 2\pi \left(2\gamma\dot{\theta} - \omega_{B}^{eff}\right) - \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^{2}}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}'\right)}{2\pi \left(2\gamma\dot{\theta} - \omega_{B}^{eff}\right) + \alpha \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^{2}}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}'\right)}$$

$$(16)$$

6. 新たな運動方程式

(12)式のrを微分すると(13)式のr'となるから、 実効的磁場分布の微分 $\omega_{B}^{ef'}$ を含む運動方程式を得る。



この式を(1)式及び(2)式と連立させて解けば良い

が、そのためには、実効的磁場分布の微分 ω_B^{eff} を ローレンツ因子と角速度、及び、これらの高階微分 で与える必要があり、次章で、それを示す。ところ で、特殊な運動を想定すれば、この式単独で、仮想 的な基準となる磁場分布を求めるための一階常微分 方程式が得られる。また、 $\gamma \ge \dot{\theta}$ の項のみを拾い上 げれば、縦方向ずれ運動の式の一つとなる。また、 この式には $\dot{\theta}$ "が含まれているので、 γ の値を固定す ると、この式単独で、横方向ずれ運動の式となる。

7. 実効的磁場分布の微分

7.1 フィールド・インデックス

実効的磁場分布の微分は、(16)式を微分して求め れば良いが、そのためには、裸の磁場分布の微分 ω_{B}' を知る必要がある。そこで、フィールド・イン デックスを利用することにする。

$$K_{B} = -\frac{r}{\omega_{B}(r)} \frac{d\omega_{B}(r)}{dr}$$
(18)

このフィールド・インデックスを用いると、裸の 磁場分布の微分の式を得る。

$$\omega_B' = r' \frac{d\omega_B}{dr} = -\frac{r'}{r} K_B \omega_B \tag{19}$$

この
$$\frac{r}{r}$$
は、(12)式と(13)式より、ローレンツ因子

と角速度、及び、これらの高階微分と実効的磁場分 布とで書き表され、また、裸の磁場分布 ω_B も、 (16)式より同様であり、それらを上の式に代入する。

$$\omega_{B}' = -K_{B} \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^{2}}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}' \right) \frac{1}{2\gamma\dot{\theta} - \omega_{B}^{eff}} \\ \times \left\{ 2\gamma\dot{\theta} - \left(2\gamma\dot{\theta} - \omega_{B}^{eff}\right) - \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^{2}}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}'\right) + \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^{2}}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma\dot{\theta}'\right) - \left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1 - \frac{1}{\gamma^{2}}} - \gamma'\dot{\theta} - \gamma'\dot{\theta}$$

この式を用いて実効的磁場分布の微分を求めるに は、(16)式の右辺の二つの式を微分すれば良い。し かし、その式はかなり長いので、ここでは割愛する。

7.2 実効的磁場分布の微分の別種の表現

(16)式の微分からして、 $\omega_{B}^{ef'}$ は γ'' や $\dot{\theta}''$ に比例す る項を含んでいる。従って、実効的磁場分布は $\omega_{B}^{eff} = \omega_{B}^{eff} \left(\gamma, \dot{\theta}, \gamma', \dot{\theta}' \right)$ (21) と書けるとして良いであろう。これを微分して $\omega_{B}^{eff'} = \gamma' \frac{\partial \omega_{B}^{eff}}{\partial \gamma} + \dot{\theta}' \frac{\partial \omega_{B}^{eff}}{\partial \dot{\theta}} + \gamma'' \frac{\partial \omega_{B}^{eff}}{\partial \gamma'} + \dot{\theta}'' \frac{\partial \omega_{B}^{eff}}{\partial \dot{\theta}'}$ (22) と言う式を得る。この式は第一段階で使用する。

8. まとめ

ローレンツ因子と角速度、及び、これらの高階微 分のみで表された運動方程式として、(17)式が求 まった。その式に現われる実効的磁場分布の微分は、 (22)式で与えるか、または、(16)式の微分で求まり、 そのとき、裸の磁場分布の微分はフィールド・イン デックスを一定として、(20)式で与えられることを 示した。いずれの式も、モデルと仮定とを必要とす るが、近似のない厳密なものである。この解を用い て、(12)式より動径を計算すれば、渦巻き状軌道を 描きながら加速されて行く運動を知ることが出来る。 なお、第一段階で、実効的磁場分布を求めるため の、ローレンツ因子を独立変数とする、独立変数が 陽に現われる、一階非線形常微分方程式は、「加速 器」第一巻第二号[1]に示したものと同じ形になる。

参考文献

 [1] 佐藤健次. サイクロトロンにおけるシンクロトロン振動 - サイクロトロンの非線形加速理論 -. 日本加速器 学会誌「加速器」Vol.1, No.2, 2004 (79-97).