

DEVELOPMENT OF A CODE FOR ANALYZING RESONANT MODES

Takuya Natsui *, Shinji Endo, Shogo Miyata, Masashi Yamamoto
Akita National College of Technology
1-1, Bunkyo-cho, Iijima, Akita, 011-8511 Japan

Abstract

Designing the accelerating cavity, we need to know its field distribution and resonant frequencies. For this purpose, we are developing a solver to analyze the high frequency electromagnetic field in resonant cavities. Accelerating cavities are generally cylindrical symmetry, so that we are developing the solver which can calculate fields in the cavities via a 2D finite element method (FEM). The developed solver is very accurate, since we used second-order and curve elements. We compared the calculation result with the theoretical estimate. In this paper, we will offer the fact that our accuracy is better than 10^{-9} .

空洞共振モード解析コードの開発

1. はじめに

加速空洞を設計する場合、共振周波数および電磁場分布を精度よく求めなくてはならない。とくに、共振周波数は高い精度が要求される。多くの加速空洞は、軸対称構造なので2次元問題として取り扱うことができる。我々はこれらを解析するため、2次元有限要素法の高周波電磁場解析プログラムを開発した。

我々が開発したプログラムでは解析の精度を上げるため2次要素を用いた。これにより、電磁場は要素内で2次の項まで表現でき、1次近似である1次要素に比べ格段に精度は高くなる。また、直線で囲まれた三角形要素を用いると、境界が曲線のときに形状誤差が計算精度を落とす原因になる。これを防ぐため、曲線境界では曲線要素を用いるようなプログラムを作成した。

有限要素法の解析では、解析領域を要素分割するメッシュ生成プログラムも必要になる。本研究では、2次要素と曲線要素に対応したメッシュ生成を行うプログラムを用意した。

2次要素と曲線要素を用いた有限要素法で共振モードを計算するプログラムを開発し、その精度を調べたので報告する。

2. 計算方法

2.1 メッシュ生成

有限要素法では、領域を要素と呼ばれる小さな三角形に分割して解析を行う^[2]。我々のプログラムでは、2次要素を用いた。1次要素では1要素に3節点が割り当てられるが、2次要素では6節点が割り当てられる。この要素は、三角形の形で、各頂点と各辺の中点が節点となっている。三角形要素と節点を図1に示す。図中の黒い点が節点である。

また、境界条件が曲線であった場合には、三角形の一边が2次曲線となる、曲線要素を用いた。これ

により、曲線の境界でも高い精度で近似できる。曲線要素と節点を図2に示す。

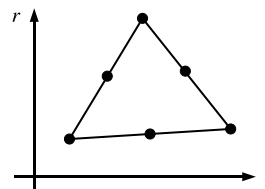


図1: 三角形要素と節点

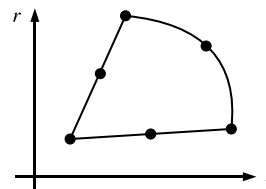


図2: 曲線要素と節点

メッシュは三角形要素と曲線要素を組み合わせた要素分割となる。曲線境界に接している要素のみ曲線要素となる。図3に実際の要素分割の例を示す。この図は、球形の領域を解析する場合の要素分割を表している。境界が曲線の場合もそれに沿って節点が配置されるようになっている。

実際には、さらに細かく要素分割を行い節点を増やして解析する。

我々が用いたメッシュ生成プログラムは形状を決めると任意のメッシュサイズに自動的に要素分割を行い、要素データと節点データを出力する。このデータは曲線境界に接する要素のみ曲線要素を使ったメッシュとなり2次要素に対応している。

2.2 有限要素法

高周波磁場解析を行うには、ヘルムホルツ方程式を解いて、共振周波数および電磁場分布を求めることとなる。ヘルムホルツ方程式の固有値を求めることで、共振周波数が求められる。

プログラムでは、式(1)の汎関数を離散化し停留値を求める有限要素法を用い、共振周波数および固有

* E-mail: s16005@cc.akita-nct.ac.jp

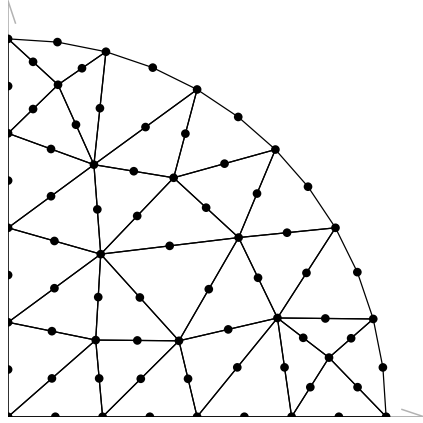


図 3: メッシュ分割と節点

モードの電磁場分布を求める．

$$J[H_\theta] = \iint r \left[\left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{H_\theta}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \left(\frac{H_\theta}{r} \right)^2 - \lambda H_\theta^2 \right] dr dz \quad (1)$$

$$\lambda = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$$

この固有モードが磁場の分布になっている．現状では軸対称構造の TM_0 モードを解析するので磁場は θ 方向のみの成分を持つ．

式 (1) の汎関数は、積分範囲を要素ごとに分けて計算する．また、求める関数 H_θ は区分多項式で近似し、2 次要素 j では 2 次式である．一つの要素内での区分多項式は以下の式で表される．

$$H_\theta = u_1 g_1(r, z) + u_2 g_2(r, z) + u_3 g_3(r, z) + u_4 g_4(r, z) + u_5 g_5(r, z) + u_6 g_6(r, z) \quad (2)$$

u_i は節点 i での H_θ の値であり、 $g_i(r, z)$ が形状関数と呼ばれる 2 次関数である．

このように、積分範囲を要素に分け、その中の関数を 2 次関数で近似し計算する方法が有限要素法である．

2.3 数値計算法

ここでの問題は、各節点での値を求めるための一般化固有値問題に帰着する．固有値が共振周波数に対応し、固有ベクトルが節点の磁場 H_θ となる．

この固有値問題の次元数は節点数に等しくなるため、大規模行列の固有値問題を解くこととなる．しかし、この行列は要素がほとんどが 0 であるスパース行列である．固有値問題の解法には共役勾配法を用い、最低次の固有モードと固有値を求めた．共役勾配法は大規模スパース行列の一般化固有値問題の

解法として適している．共役勾配法での解法を以下で説明する．

一般化固有値問題は、(3) 式で与えられ、 λ は (4) 式の Rayleigh 商から求められる．

$$Ax = \lambda Bx \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{(x, Ax)}{(x, Bx)} \quad (4)$$

共役勾配法ではこのような固有値問題の最小固有値を求める．(3) 式の最急勾配方向 $g(x)$ を以下に示す．

$$g(x) = \frac{2(Ax - \lambda Bx)}{(x, Bx)} \quad (5)$$

適当な α_i を用いれば、固有ベクトルは以下のように反復法で求められる．

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (6)$$

$$p_i = -g_i + \beta_{i-1} p_{i-1}, \quad \beta_{i-1} = \frac{(g_i, g_i)}{(g_{i-1}, g_{i-1})} \quad (7)$$

このように一般化固有値問題を解き、共振周波数と磁場分布が計算できる．磁場がわかれば、その回転をとることによって電場分布も知ることができる．電場は以下の式で表される．

$$E = \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \nabla \times H \quad (8)$$

θ 方向の磁場だけが存在するときの回転は以下の式になる．

$$\nabla \times H = \left(-\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) \hat{z} \quad (9)$$

3. 計算結果

3.1 誤差

作成したプログラムの計算誤差を調べるために解析解との比較を行った．具体的には図 3 に示したような 1/4 の球形空洞の共振周波数を計算した．

半径 1m の球形空洞の固有値の解析解は、 $\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = 7.527929582$ である．この値とプログラムの計算結果を比較した．加えて、SUPERFISH^[1] の誤差とも比較した．

ここでの、誤差 δ は

$$\delta = \left| \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} \right| \quad (10)$$

λ : 計算値 λ_0 : 解析値

とした．

求められた誤差のグラフを図 4 に示す．ここで、メッシュサイズとは三角形要素の一辺の長さである．図からわかるように SUPERFISH は平均メッシュサイ

ズの2乗で誤差が減少しているが、作成したプログラムは4乗で誤差が減少している。つまり、メッシュ面積で考えると SUPERFISH は1乗で、作成したプログラムは2乗で誤差が減少している。このことから、プログラムは意図したとおりに動作していると推測できる。

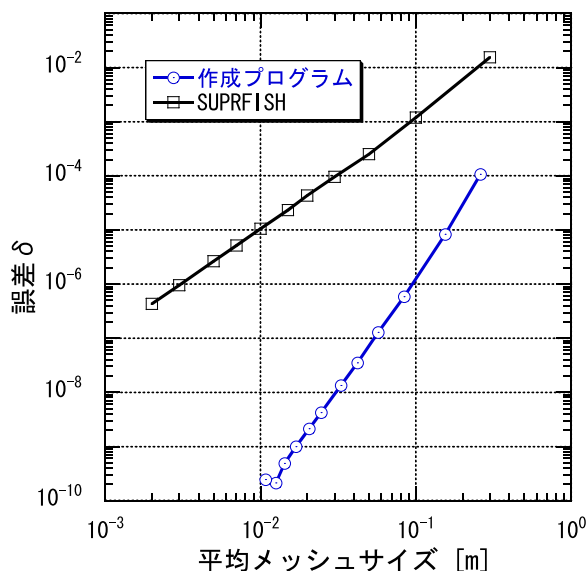


図 4: 計算結果の誤差のグラフ

ただ、メッシュサイズが 0.013m より小さくなったあたりで、それまで直線的に変化してきた誤差の値が直線からはずれてしまっている。つまり、今の場合は 2×10^{-10} 程度が誤差の限界である。この限界がなにに起因しているのかは不明である。

計算時間は、もっとも計算精度が高かった 0.014m のメッシュサイズで、200sec ほどだった。ここで、CPU は Pentium4 の 2.8GHz を使用した。

3.2 計算結果

球形空洞の計算結果を例として図 5 に示す。軸上、すなわち z 軸上ではディレクレ条件、それ以外の境界ではノイマン条件を与えた。この例では、節点数 3430、要素数 1669 で計算している。共振周波数の計算精度は 1.3×10^{-8} 程度であった。

図 5 は磁場の強さを色で表し、その結果から得られる電気力線を線で表している。外周部が磁場がもっとも強いところである。

4. まとめ

2 次要素を使った有限要素法のプログラムを作成し共振周波数の誤差はメッシュサイズの 4 乗（要素面積の 2 乗）に比例し、精度が 2×10^{-10} 程度であることを確認した。また、曲線要素を使っているので、複雑な形状においても精度の高い計算結果が得られるだろうと考えられる。

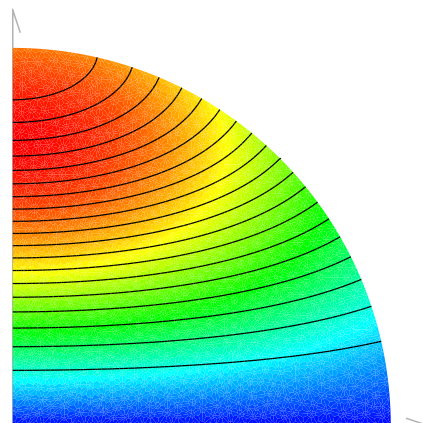


図 5: θ 方向の磁場の強さと電気力線

球形空洞の共振周波数と固有モードを求める計算にかかった時間は、CPU が Pentium4 の 2.8GHz の計算機を使ったとき、200sec ほどで 2×10^{-10} 程度の計算精度が得られた。

今回は、単純な形状での精度検証だったが、今後もっと複雑な形状での精度検証も必要であると考えている。

また、精度検証のところで触れたがメッシュを細かくするとあるところでそれ以上精度が上がらなくなるところがある。この原因は不明だが、おそらく丸め誤差によるものと予想されるので計算の有効桁数を増やせばさらに精度の高い結果が得られると考えている。

今後の課題として、今のところは周期的境界条件が扱えないのでこの条件を取り入れることがあげられる。また、アダプティブメッシュの採用も考えたい。これができれば、より効率よく精度の高い結果が得られると予想できる。

今の段階では、計算結果の表示は OpenGL を使い磁場分布、電場分布などを表示できるようになっている。また、それをビットマップ形式で保存でき、また、eps 形式で図を描くこともできるようになっている。しかしながら、実用的なソフトとして使うには、まだまだインターフェースの部分で問題があるので、今後は、GUI を充実させて使いやすいようにしていきたいと思う。

本研究で作成したプログラムはすべて C++ 言語で組まれている。

参考文献

- [1] K.Halbach, et al., “SUPERFISH-Electron Optics and Gun Design”, SLAC Rep. 331, October 1988.
- [2] 谷口健男, “FEM のための要素自動分割”, 森北出版株式会社, 2002.