

# 金属円筒パイプの中を運動する低ベータ重荷電粒子に対するビーム診断について ON BEAM DIAGNOSTICS FOR A LOW-BETA HEAVY CHARGED PARTICLE MOVING IN A METALLIC CYLINDRICAL PIPE

諏訪田剛\*

Tsuyoshi Suwada\*

Accelerator Laboratory, High Energy Accelerator Research Organization (KEK)

## Abstract

Basic beam diagnostics techniques for heavy charged particles, such as proton and ions, in heavy-particles linear accelerators are described for young researchers and graduate students specializing particle accelerators and beam physics. Since heavy charged particles especially in pre-acceleration section are not influenced by the relativistic effect, it may be thought that the beam diagnostics techniques are difficult to design beam instrumentations in comparison with those for light charged particles, such as electrons and positrons. For example, electromagnetic-detection-type, such as stripline- and button-type, beam position monitors (BPMs) are widely utilized to measure transverse beam positions for such charged particles in linear accelerators. There are some differences between light and heavy charged particles in the design of such BPMs due to the relativistic effect. This means that the BPMs may be advantageous to electrons in comparison with heavy particles. Who knows but it may be right? It is discussed in this report that several advantage or disadvantage from the view point of the beam diagnostics techniques are clarified by quantifying beam parameters for these different charged particles.

## 1. はじめに

加速器においてビーム診断に要求される技術は広範な分野に及ぶ。ビームの電磁場検出は、最も基本的な診断技術の1つで、ビーム電荷を計測する壁電流モニター(WCM)やビーム位置を計測する位置モニター(BPM)はこの検出技術を応用したものである。金属円筒パイプの中を運動する荷電粒子が生成する電磁場の相対論的效果は、ビーム診断では基本事項の1つである。金属円筒パイプ中を運動する荷電粒子の電磁場は、ローレンツ変換により軸方向に粒子速度に依存して伸縮する。

2002年、筆者はKEKで毎年開催される高エネルギー加速器セミナー(OHO'02 [1])において「ビーム計測I」というタイトルで講師を務めた。本セミナーではWCMやBPMについて基本的な動作原理を紹介したが、導入のところで取り上げたビーム電磁場の相対論的效果について、当時幾つかのセミナー資料を調べてみたが適当な文献を見い出せなかった。それでは自分で導出しようと試みたが、結局断念した覚えがある。

今回、この相対論的效果について厳密な導出の必要性に迫られ、当時の私が著した講義資料の補遺[2]という形でまとめることにした。本報告は、特に低ベータ重粒子と相対論的電子に対するビーム診断の観点からその差異を論じたものである。

## 2. 金属円筒パイプの中を運動する軸外点電荷が作る電磁場

金属円筒パイプの中を運動する軸外点電荷が作る電磁場について考察してみよう(文献[2]参照)。Figure 1(a)にパイプ断面座標系を、Fig. 1(b)にパイプ側面座標系をそれぞれ示す。

Figure 2(a)(Fig. 2(b))に、円筒パイプの中を静止(低

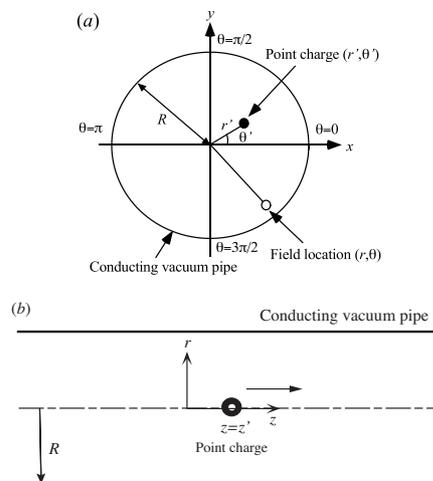


Figure 1: 金属円筒パイプの中を走行する点電荷と円筒座標系。(a) パイプ断面座標系、(b) パイプ側面座標系。

速) 点電荷が軸方向に停止(走行)しているときのパイプ内に生じる電磁場の様子を模式的に示す。

電磁力線の様子から以下の特徴的なことが言える。

1. 静止点電荷の場合 ( $\beta = 0, \beta \equiv v/c, v$ : 点電荷速度,  $c$ : 光速,  $c \approx 3.0 \times 10^{11}$  mm/s),  $z$  軸方向の電場分布は最大限に広がる。他方磁場は消失する。
2. 運動する点電荷 ( $\beta < 1$ ) の場合、相対論的效果により  $z$  軸方向の電場分布の広がりは  $1/\gamma$  を乗算する程度まで圧縮される。相対論的效果により同時に磁場が生成される。

$z$  軸方向の電場分布は近似的にガウス分布を用いて表すことができ、その広がり ( $1\sigma$ ) は次に表される。

$$\sigma \approx \frac{R}{\sqrt{2}\gamma} \quad (1)$$

\* tsuyoshi.suwada@kek.jp

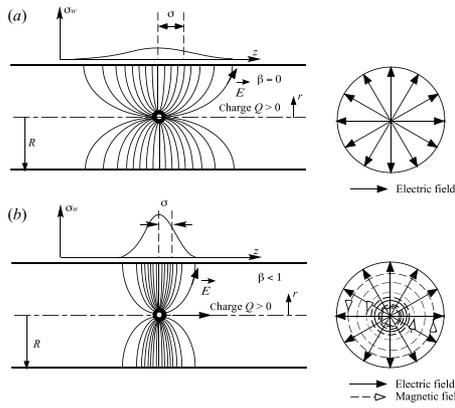


Figure 2: 円筒パイプの中で作られるパイプ側面と軸方向から見た電磁力線の様子。(a) 静止点電荷 ( $\beta = 0$ ) の場合、(b) 運動する点電荷 ( $\beta < 1$ ) の場合。

ここで、 $\gamma$  は相対論的ローレンツ係数 ( $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ )、 $R$  はパイプ半径である。(1) 式に従うと、超相対論的粒子の場合 ( $\beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow \infty$ )、分布の広がり  $\sigma \rightarrow 0$  となる。従って  $z$  軸方向に分布幅を持ったバンチの場合、電場の広がり  $\sigma$  がそのままバンチ幅に等しくなる。他方、重粒子の場合 ( $\gamma \sim 1$ )、電場の広がり  $\sigma$  はパイプ半径程度になり、電場の広がりから直接的にバンチ長を推定することが困難になる。

点電荷に対し金属円筒パイプ内面上に誘起される壁電荷を考察する。壁電荷量 ( $\sigma_w(r=R)$ ) の厳密な式は (2) 式に与えられる (文献 [2] 参照)。

$$\sigma_w(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t=0)_{r=R} = -\frac{1}{4\pi^2 R} \times \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{jk(z-z')} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\theta-\theta')} \frac{I_m(kr'/\gamma)}{I_m(kR/\gamma)} \quad (2)$$

ここで、 $I_m(z)$  は  $m$  次の変形ベッセル関数を表す。(2) 式は、パイプ内位置 ( $r', \theta', z'$ ) に点電荷が存在するときのパイプ内面位置 ( $r=R, \theta, z$ ) に誘起される壁電荷を表す相対論的効果を考慮した厳密な式である。時間に関し、 $t=0$  と置き点電荷の走行を停止した瞬間の壁電荷分布を与える式になっている。この (2) 式が重粒子ビーム診断を考察する上での基本式となる。

他方、円筒パイプ内を走行する超相対論的粒子に対する壁電荷分布は (3) 式に与えられる<sup>1</sup>。

$$\sigma_w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{r=R} = \frac{1}{2\pi R} \times \frac{R^2 - r'^2}{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos(\theta - \theta')} \quad (3)$$

(3) 式は電子に対するビーム診断ではよく知られた壁電荷分布を表す公式である。ここでは点電荷の例として

<sup>1</sup> (2) 式において  $\gamma \rightarrow \infty$  の極限を取れば (3) 式に一致する (文献 [2] 参照)。(2) 式によると  $z$  軸に対する分布の依存性が見えるが、(3) 式では超相対論的効果により消失していることに注意してほしい。

陽子を取り上げ、円筒パイプ内 ( $R = 20$  mm) を走行するとき誘起される壁電荷分布の (2) 式による計算例を示す。

Figure 3(a) は、 $\gamma$  をパラメータとした点電荷位置変位に対する壁電荷の強度変化  $\sigma_w(z=z', \theta=0)$  に固定) の変化を示す。Figure 3(b) は、 $\gamma$  をパラメータとした壁電荷の  $z$  軸方向分布を示す。

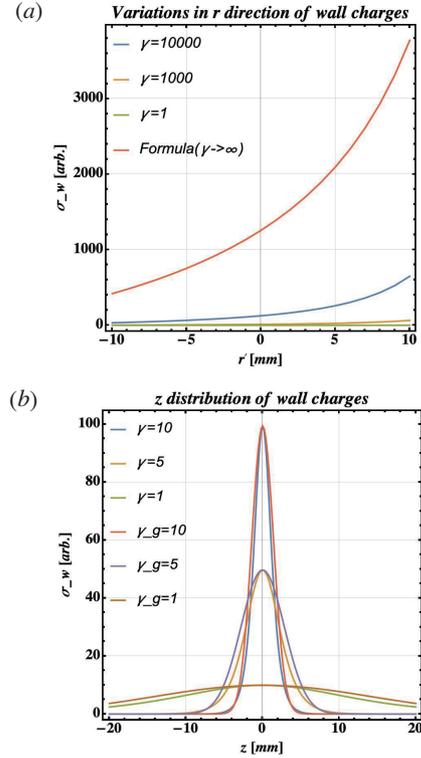


Figure 3: 相対論的効果を考慮した円筒パイプ内面に誘起される (a) 点電荷位置変位に対する壁電荷の強度変化。(b) 壁電荷の  $z$  軸方向分布。電荷位置は ( $r' = 0, \theta' = 0, z' = 0$ )、検出位置は ( $r = R, \theta = 0, z = 0$ ) に固定。

Figure 3(b) では、近似的な電磁場分布となるガウス分布 ( $\gamma_g$ ) も同時に表示している。このことから、 $z$  軸方向の分布幅 ( $1\sigma$ ) に対する簡便な公式として (1) 式が充分使えることがわかる。また、Fig. 3(b) から  $z$  軸方向の電場分布のピーク値は  $\gamma$  が小さいほど低下することがわかる。これは、重粒子に対する信号検出感度が相対論的効果の消失により低下することを意味する。このことは、壁電荷の横方向位置に対する感度低下 (Fig. 3(a)) を同時に招くことになり、前節で述べた重粒子ビーム診断に対する不利点を示す。

重粒子の静止質量  $m_0$ 、運動エネルギー  $T$  とすると、これらのパラメータと相対論的  $\gamma$  との関係は、非相対論的近似を行うと

$$\gamma \simeq \frac{m_0 c^2 + T}{m_0 c^2} \quad (4)$$

で与えられる。従って、任意の重粒子において静止質量と運動エネルギーを使って相対論的  $\gamma$  に変換すれば、これまでの議論が任意の重粒子に対し成立する。

例として、陽子 ( $m_0 = 938 \text{ MeV}$ ) の運動エネルギーを  $T = 2 \text{ MeV}$  とすると  $\gamma \simeq 1.002$  となる。相対論的  $\beta$  に焼き直せば、 $\beta \simeq 6.5 \times 10^{-2}$  ( $v \simeq 2.0 \times 10^9 \text{ mm/s}$ ) となる。ちなみに高エネルギー電子の場合、典型的なエネルギーを  $1 \text{ GeV}$  とすると  $\gamma \simeq 2 \times 10^3$  ( $\beta \simeq 1$ ) となり、扱うエネルギー領域の違いにより  $\gamma$  の違いが如何に異なるかがわかる。重粒子の場合、この非相対論的効果がビーム診断技術において本質となる。ビーム診断に対する幾つかの不利点を示したが、よく考えて見ると必ずしもそうとは言えず、重粒子の特性を利用すればむしろ電子では計測困難であるビーム診断が可能となり利点を見出せることが次に例証される。

### 3. 低ベータ重荷電粒子ビーム診断への応用

ここでは基本的なビームパラメータである横方向位置/電荷量/バンチ長を取り上げ、これらのパラメータに対し期待される計測精度などを見積もることにしたい。

(2) 式を用いて電極上に誘起される壁電荷を計算することが基本となる。(2) 式は、パラメータ  $k$  に関する積分と変形ベッセル関数の次数  $m$  に関する和の形式で与えられる。しかもパラメータは無制限まで走るの、(2) 式を直接的に数値計算することは困難である。従ってこれらのパラメータに対し、適切なパラメータ領域、有限時間内で十分な精度で収束可能な数値計算を実施する必要がある<sup>2</sup>。

簡単のため Fig. 1(a) に示す電極構造を持たない円筒パイプ内面上に誘起される壁電荷を近似的に考える。ただし、電極開口角 ( $50^\circ$ ) に相当する領域で壁電荷を数値積分することで実電極に誘起される壁電荷として近似する。このためにパイプ半径を  $R = 21 \text{ mm}$  として (2) 式を用いることにした。

まず最初に、(2) 式の収束性を確認するためにパラメータ  $m$ 、 $k$  に関する壁電荷の収束性を確認する。ただし、 $k$  は壁電荷の  $z$  軸分布のフーリエ周期に関するパラメータであり、その逆数を単位として  $lmtz$  倍までを積分範囲としてパラメータ  $lmtz$  に関する収束性を確認する。 $k$  に関する積分範囲を具体的に (5) 式に示す。

$$-\frac{lmtz}{z-z'} \leq k \leq \frac{lmtz}{z-z'} \quad (5)$$

計算条件として、運動エネルギー  $T = 2 \text{ MeV}$ 、 $z-z' = 10 \text{ mm}$  に固定した。検出電極を Ch#1 ( $\theta = 0$ ) (Fig. 1(a) 参照) とし、陽子が Ch#1 に近づく位置  $r'$  をパラメータとして電極に誘起される壁電荷量を計算した。

Figures. 4(a)、(b) にパラメータ  $m$ 、 $lmtz$  に関する壁電荷量  $\sigma_w$  の収束性をそれぞれ示す。ここで、パラメータ  $m$  ( $lmtz$ ) の計算においては、対となるパラメータ  $lmtz$  ( $m$ ) は最大値に固定していることに注意してほしい。

陽子は電極に近づくほど、誘起される壁電荷量が急速に大きくなるのがわかる。これは電極に近づくほど、電場の非線形効果により壁電荷誘起が強められるからである。陽子位置が大きいほど収束点における  $m$

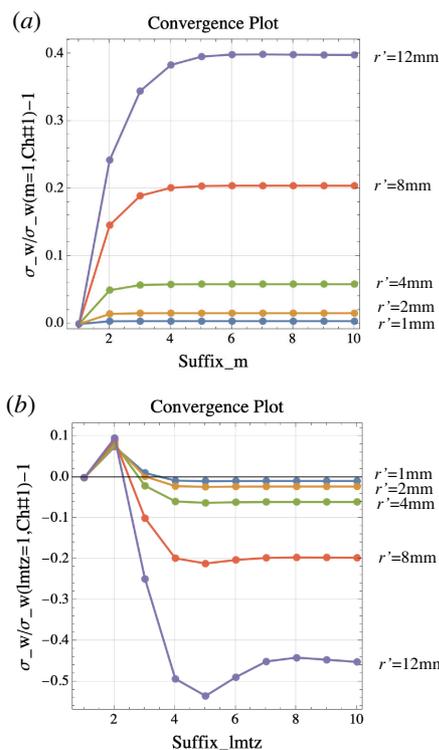


Figure 4: (a)  $m$ 、(b)  $lmtz$  に関する  $\sigma_w$  の収束性。

が大きくなっている。 $m \simeq 6$  は、位置  $r' = 12 \text{ mm}$  においても十分な収束安定点を示している。

パラメータ  $lmtz$  に対する収束安定性は  $m$  に比べ複雑な振る舞いをしてはいるが、位置  $r' = 12 \text{ mm}$  においても十分な収束安定点に達し、この点は  $lmtz \simeq 8$  である。この結果から、さらに大きな位置変位を考慮して  $m = 10$ 、 $lmtz = 10$  を最大パラメータとして採用することにした。

これで壁電荷量計算のための基本パラメータが準備できた。以下ではこれらのパラメータを固定し、陽子に対する各種の物理量を計算し、対応する物理量の計測精度について議論することにした。

## 4. ビーム物理量計測

### 4.1 電荷量計測

円筒パイプ内面  $z$  軸方向に誘起される壁電荷は、Fig. 2 に示すように内面上に生成される電場分布に従い誘起される。従って、壁電荷分布がわかれば電荷量が推定できるのと同時に、パイプ内面上  $z$  軸方向の電場分布を知ることができる。

$z$  軸方向の電場の広がりは、陽子の横方向位置が変位するとその変位量に従い変化する ((2) 式参照)。BPM の原理は、まさにこの変化を利用している。Figure 5 に、陽子位置  $r'$  をパラメータとしたときの電極に誘起される壁電荷の  $z$  軸分布を示す。

同図 (a) は、陽子位置を  $r' = 0 - 12 \text{ mm}$  の範囲で変化させたときの Ch#1 ( $\theta = 0$ ) に誘起される壁電荷の  $z$  軸分の計算例を示す。ただし、位置変位に対し電極に

<sup>2</sup> 数値計算には Wolfram Research 社の Mathematica14 を用いた。

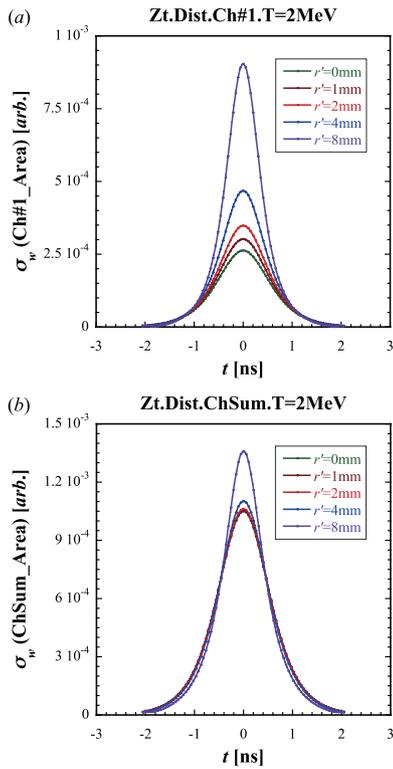


Figure 5: 陽子位置  $r'$  をパラメータとしたときの電極に誘起される壁電荷の  $z$  軸分布。(a) Ch#1( $\theta = 0$ ) に誘起される壁電荷の  $z$  軸分布。(b) 四電極信号和に従う壁電荷の  $z$  軸分布。運動エネルギー  $T=2$  MeV に固定。

近づく方向を正としている。損失の無い理想的な信号検出を行えば、同図 (a) に示す理想的な信号が得られる。この場合、信号強度として信号のピーク値や面積を演算しても位置に強く依存するので、電荷量計測においては素性のよい物理量とはならない。

他方、四電極の信号和を演算すれば、位置依存性が改善できることが期待される。このことは、パイプ内面上に誘起される全電荷量を積分すれば陽子の電荷量に等しくなるという電荷量保存則から言える。Figure 5(b) は、位置を  $r' = 0 - 12$  mm の範囲で変化させたときの壁電荷 (四電極信号和) の  $z$  軸分布を計算した例を示す。このことから、四電極信号和の面積を演算すれば位置依存性がある程度緩和され、電荷量計測が可能になる。

Figure 6 に位置変位に対する壁電荷量の変化を示す。四電極信号和による壁電荷の変化曲線によると位置  $r' = 6$  mm における変化量は  $\sim 1\%$  程度である。この精度が許容されるならば位置制御は厳しくは無いだろう。

次に、壁電荷量に対する陽子の運動エネルギー依存性を確認しておこう。Figure 7 に運動エネルギーに対する壁電荷量の変化を示す。信号面積を演算すれば壁電荷量の運動エネルギー依存性は、予想されるように消失することがわかる<sup>3</sup>。このことから、電極の信号強度としてパルス面積が素性のよい物理量となる。

<sup>3</sup> 四電極信号和の曲線を見ると多少の運動エネルギー依存性が見られる。これは計算精度の劣化に起因するものである。

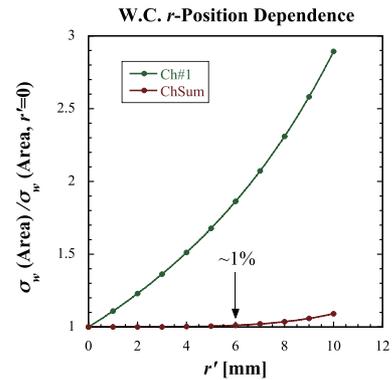


Figure 6: 位置変位に対する壁電荷量の変化 (電極 Ch#1、四電極信号和 (ChSum))。壁電荷量は位置  $r' = 0$  における壁電荷量で規格化している。  $T=2$  MeV に固定。

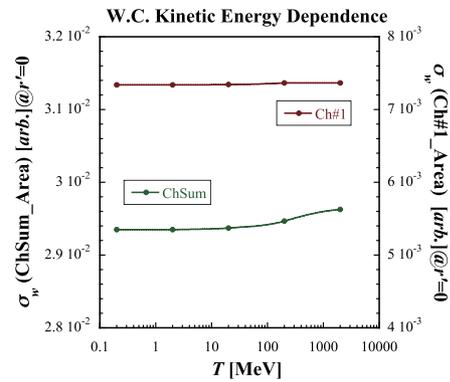


Figure 7: 陽子の運動エネルギーに対する  $\sigma_w$  の変化 (電極 Ch#1、四電極信号和 (ChSum)、位置  $r' = 0$  に固定)。

#### 4.2 信号パルス幅計測

ここでは信号のパルス幅計測について議論する。信号パルス幅計測は、バンチ長計測にも関連し重要な物理量計測の一つである。最初に、信号パルス幅の運動エネルギー依存性を確認しておこう。

Figure 8 に陽子の運動エネルギーに対する信号パルス幅 ( $1\sigma$ ) の変化を示す。信号は四電極信号和を取り、位

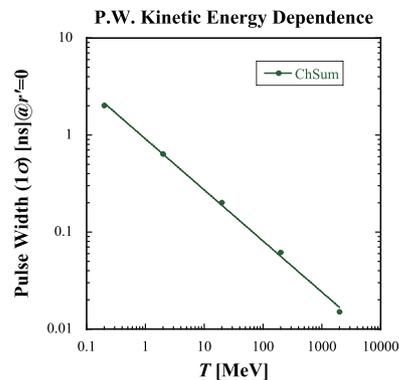


Figure 8: 陽子の運動エネルギーに対する信号パルス幅 ( $1\sigma$ ) の変化 (四電極信号和 (ChSum)、位置  $r' = 0$ )。

置  $r' = 0$  に固定している。信号パルス幅は、相対論的効果により運動エネルギーに対し指数関数的に減少していることがわかる。この結果は、(2) 式に基づく壁電荷分布の数値計算が正しいことを示している。

Figure 9 に陽子位置に対する信号パルス幅の変化を示す。パルス幅は陽子位置に強く依存することが見て取

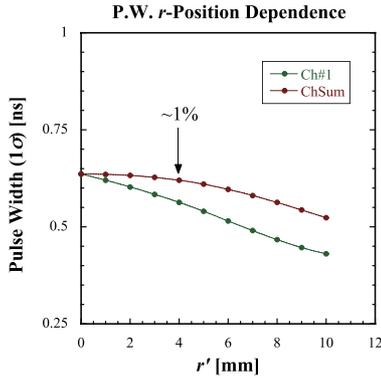


Figure 9: 陽子位置に対する信号パルス幅の変化 (電極 Ch#1、四電極信号和 (ChSum))。  $T=2$  MeV に固定。

れるが、四電極信号和を取る限りある程度緩和されることがわかる。位置  $r' = 4$  mm で  $\sim 1\%$  程度の変化が見込まれる。信号パルス幅は、陽子位置が  $r' = 0$  において最大を示し、パルス幅は  $\sigma \sim 0.64$  ns に達する。この程度のパルス幅計測は困難なく行うことができよう。

### 4.3 バンチ長計測

バンチ長計測では点電荷と言えども信号パルス幅が広がっているため、その計測には限界がある。ここでは、バンチ長計測に対する限界値を見積もりたい。

バンチ長は、壁電荷の  $z$  軸分布から推定される。信号のパルス幅自体がバンチ長に等しいわけではないので、その変化からバンチ長を推定する必要がある。信号パルス幅は、バンチ位置と有限なバンチ長の両方の変化に依存するので、バンチ位置を制御しながらパルス幅の微小変化を計測しなければならない。信号パルス幅は運動エネルギーにも強く依存するが、エネルギー計測も同時に行えばこの依存性を消失させることができる。ここでは、運動エネルギーを固定して議論する ( $T=2$  MeV)。

バンチ長は、点電荷による  $z$  軸分布 ( $\sigma_p(r)$ ) をバンチ電荷の  $z$  軸分布の重みを付けて重ね合わせた信号から見積もることができる。陽子の電荷分布をガウス分布と仮定し、バンチ長 ( $1\sigma$ ) を  $\sigma_{bl}$  と置くと、ガウス分布の重ね合わせから、計測される信号パルス幅 ( $\sigma(r)$ ) は (6) 式から見積もることができる。

$$\sigma(r) = \sqrt{\sigma_p^2(r) + \sigma_{bl}^2} \quad (6)$$

ここで  $\sigma_p(r=0)$  は、 $\sigma_{bl} = 0$  の場合に計測される点電荷のパルス幅を基準信号幅とする。位置変位に対

し計測されるパルス幅と基準信号幅との差を  $(\Delta t)_{r'}$  とし、またバンチ長変化に対し計測されるパルス幅と基準信号幅との差を  $(\Delta t)_{bl}$  とする。Figure 10 にこれらのパラメータに対する二次元相関図を示す。図中では異

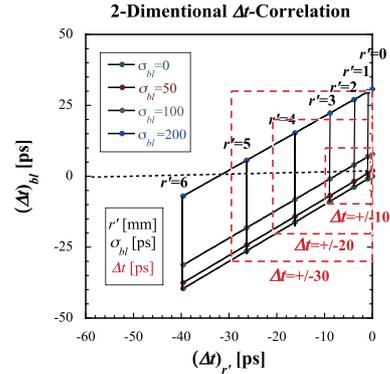


Figure 10: パラメータ  $(\Delta t)_{r'}$  と  $(\Delta t)_{bl}$  に対する二次元相関図。  $T=2$  MeV に固定。

なる計測分解能 ( $\Delta t$ ) に対し赤点線枠で囲っている。すなわち、各計測分解能で示した赤点線枠上で、バンチ長計測に対する許容位置とバンチ長計測の限界値を見積もることができる。

例えば、計測分解能  $\Delta t = \pm 10$  ps の場合、許容位置は  $r \sim 3$  mm、計測限界値は  $\sigma_{bl} \sim 110$  ps である。また  $\Delta t = \pm 30$  ps の場合、許容位置は  $r \sim 5$  mm、計測限界値は  $\sigma_{bl} \sim 200$  ps であることを示す。実際の計測環境を想定すると、 $\Delta t \sim \pm 30$  ps が妥当な計測分解能であろう。この場合、バンチ長計測限界値は  $\sigma_{bl} \sim 200$  ps である。低ベータ重粒子に対するバンチ長計測は、電子ビームで要求される複雑さに比べ簡便な診断装置で済むので大きな利点となる。

## 5. まとめ

陽子やイオンなどの重粒子に対するビーム診断技術として電子線形加速器で広範に用いられている電磁場検出型モニターの応用を検討した。日頃、電子線形加速器に従事している筆者としては様子が異なり戸惑うことも多い。文献 [2] に著したように、荷電粒子が金属円筒パイプ内に生じる電磁場を厳密に解析したことから、本稿で重荷電粒子に対するビーム診断への応用として発展させることができた。今回の解析は、文献 [1] の続編として著したものである。これから加速器研究を始めようとしている大学院生や若い研究者等のビーム診断入門として参考にして頂ければ著者としても幸甚の至りである。

## 参考文献

- [1] 諏訪田 剛: “ビーム計測 I”; 高エネルギー加速器セミナー (OHO'02) 講義録, August, 2002.
- [2] 諏訪田 剛: “金属円筒パイプの中を運動する軸外荷電粒子が作る電磁場について”, KEK Report 2024-2, August 2024.