

# 3次元数値計算を用いたスミス＝パーセル放射における表面電流モデルの評価 EVALUATION OF SURFACE CURRENT MODEL IN SMITH-PURCELL RADIATION USING 3-D NUMERICAL CALCULATION

山田悠樹<sup>#</sup>, 武藤俊哉, 日出富士雄, 柏木茂, 南部健一,  
Kavar Anjali, 熊谷航平, 長澤育郎, 鹿又健, 高橋健, 柴田晃太郎, 濱広幸  
Hiroki Yamada <sup>#</sup>, Toshiya Muto, Fujio Hinode, Shigeru Kashiwagi, Kenichi Nanbu,  
Anjali B. Kavar, Kouhei Kumagai Ikuro Nagasawa, Ken Kanomata, Ken Takahashi, Koutaro Shibata, Hiroyuki Hama  
Research Center for Electron Photon Science, Tohoku University

## Abstract

The study of bunch length measurement using coherent Smith-Purcell radiation (CSPR) has been performed at the Research Center for Electron Photon Science, Tohoku University. Information on the SPR spectrum of a single electron is required to obtain the longitudinal bunch shape from the measured CSPR spectrum. So far, the surface current model has been widely used to calculate SPR distributions. However, it was found that our measurement results of the angular distribution and polarization of the CSPR were not consistent with the expectation based on the conventional surface current model. Therefore, we reconsidered the model and performed three-dimensional numerical calculation to take into account geometrical shading effects for the surface current model. We describe the 3D numerical calculation and discuss the results in comparison with measurements.

## 1. はじめに

スミス＝パーセル放射 (SPR) は周期構造を持った金属近傍を電子が通過する際に発生する電磁波であり、放射波長がその周期構造の周期長と観測角によって規定されることが特徴である[1]。バンチ長が観測される放射の波長より十分に短い場合にはコヒーレント放射 (CSPR) となり、従来行われてきたような CTR のスペクトル測定によるバンチ長測定などと異なり、CSPR ではその角度分布を測ることで、分光することなく放射スペクトルの情報を得ることができる。このことからシングルショットでの測定が可能なビーム非破壊のバンチ長モニターとしての応用が期待されている。その際、バンチ形状に関する情報 (バンチ形状因子) を得るためには、測定された放射のスペクトルの他に単電子の SPR のスペクトルが必要になるが、この評価のためのモデルの一つとして表面電流モデルが広く用いられている[2]。これまで東北大学電子光物理学研究センターでは、試験加速器 t-ACTS において CSPR を用いたバンチ長計測の研究を行ってきた[3]。しかし放射強度の角度分布について、これまでの我々の測定結果がモデル計算と必ずしも一致しないことが分かった。そこで表面電流モデルについて改めて検討を行い、表面電流における幾何学的な遮蔽効果の影響を三次元数値計算により評価した[4]。ここでは表面電流モデルについての検討と実施した数値計算について補足しながら、実験との比較について報告する。

## 2. 表面電流モデル

スミス＝パーセル放射の放射波長は、

$$\lambda_n = \frac{d}{n_g} \left( \frac{1}{\beta} - \cos\theta \right) \quad (1)$$

であらわされ、ここで  $d$  は格子の周期、 $n_g$  は放射の次数、 $\theta$  は電子の進行方向 ( $z$  軸) からとった観測角、 $\beta = v/c$  は電子の相対論的速度である。ここで用いる座標系を Fig. 1 に示す。 $z$  軸に垂直な平面で回折格子と垂直な軸からとった角度を  $\phi$  とする。

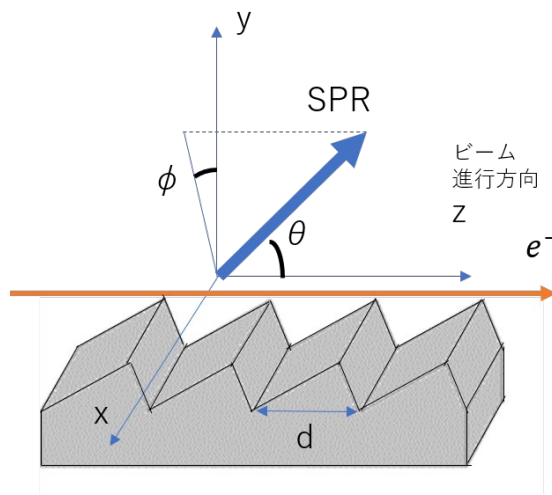


Figure 1: Schematic diagram of SPR and coordinate system.

SPR は電子が通過する際に完全導体表面上に誘起される電流により生成されるとするのが表面電流 (SC) モデルである[5]。ある回折格子面上の表面電流について、表面電荷密度  $\rho$  とその速度  $\vec{V}$  の積で表す。1 周期の表面電流  $\vec{J}_{tooth}$  は 1 周期を構成する各面の和である。

$$\vec{J}_{tooth}(\vec{r}_g, t) = \sum_{f=1}^F \rho(\vec{r}_g, t, s_f) \vec{V}(\vec{r}_g, t, s_f) \quad (2)$$

<sup>#</sup> yamada@lns.tohoku.ac.jp

また全体の表面電流 $\vec{J}_{total}$ は各周期の和である。

$$\vec{J}_{total}(\vec{r}_g, t) = \sum_{m=1}^{N_g} \vec{J}_{tooth} \left( \vec{r}_g - m d \vec{z}, t - \frac{m d}{v} \right) \quad (3)$$

t-ACTS での実験で用いた回折格子を例にとって考え、Fig. 1 のような三角形の回折格子の上流側の面を 1st facet, 下流側の面を 2nd facet と定義する。ここで $\vec{r}_g$ は電子から回折格子表面の点までのベクトルであり、電子と回折格子表面との距離を $R_g$ とすると、 $\vec{r}_g = R_g \cdot \vec{n}$ ,  $s_f$ は1周期における各面を表すと定義する。Liénard-Wiechert potentials より真空中を運動する電子からの電場は

$$\vec{E}_{ele}(\vec{r}_g, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 R^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\vec{n} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right\}}{R c (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \right]_{ret} \quad (4)$$

であらわされる[6]。回折格子上空にある電子が直下の回折格子表面に誘導電荷を発生させるとき、その電場は遅延時間 $t_r = t - \frac{R_g}{c}$ における電子からのものである。電子が加速されていないので加速度項は 0 である。この電場の回折格子表面に垂直な成分が表面電荷密度 $\rho$ に比例する。電子軌道と回折格子面の延長の交点において電子と表面電荷が一点に収束すると仮定する。表面電荷がこの交点に到達する時間を $t'$ と定義する。時間 $t$ における表面電荷の位置とこの交点との距離を $t' - t$ で割ったものが表面電荷の速度である。

$$t' = \frac{-(z_0 - z_1) + (y_0 - y) \tan^{-1} \alpha}{v} \quad (5)$$

$$\vec{V}(\vec{r}, \vec{r}_0, t, s) = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{t' - t} = \frac{R_g \vec{n}}{t' - t} \quad (6)$$

電子の速度ベクトルは $\vec{v} = \beta c \vec{z}$ である。このとき表面電荷速度はz方向については $v$ と一致する。一方で他の成分については回折格子表面に沿って移動するために速度の大きさが光速を超過することになる。 $t=0$ の時速度の大きさは $|\vec{V}| = \beta c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ である。第1面の傾斜角6度、頂角90度、第2面の傾斜角が-84度の場合第一面においては $1.005c$ 、第2面においては $9.56c$ となり特に第2面においては光速を大きく超過している。第1面と第2面における表面電流密度の違いについて Fig. 2 に示す。第1面においては遠方で一点に収束するが、第2面では発散する方向である。電流密度 $\vec{J}_{total}$ により $\vec{n}_r$ 方向に放射されるエネルギーは

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \omega \partial \Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \int d^3 \vec{n}_r \times \vec{n}_r \times \vec{J}_{total}(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right|^2 \quad (7)$$

であらわされる[6]。求めた $\rho$ と $\vec{V}$ を代入し幾何学的な遮蔽や端部の効果、電場の反射や回折を無視する近似のもとで解析的に解くことで得られる単電子の SPR の分布は

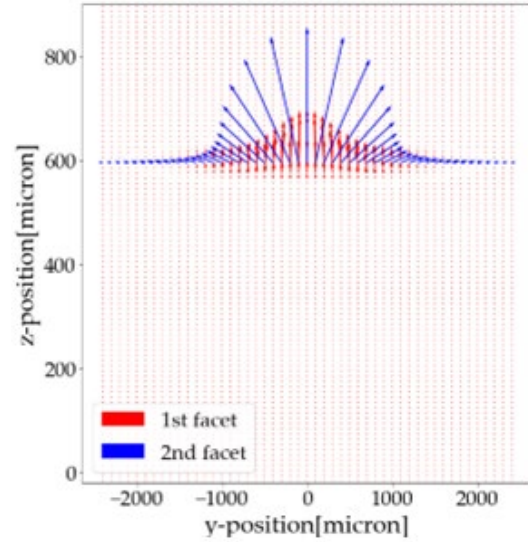


Figure 2: Surface current density at the first and second facets.

$$\left( \frac{dI}{d\Omega} \right)_{sp} = 2\pi e^2 \frac{Z}{d^2} \frac{m^2 \beta^3}{(1 - \beta \cos \theta)^3} R^2 \exp\left(-\frac{2h}{\lambda_e}\right) \quad (8)$$

である[7]。ここで $Z$ は回折格子の全長、 $e$ は電子の電荷、 $R^2$ は回折格子形状によって決まる回折格子因子と呼ばれる値である。 $R^2$ は1周期における各面について計算することができる。 $\lambda_e \equiv \frac{\beta \gamma \lambda}{2\pi \sqrt{(1 + \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi)}}$ はエバネッセント波長と呼ばれる値である。Figure 3 に $\theta=90$ 度における単電子の場合の第1面と第2面からの放射及び全体の放射の $\phi$ 分布を示す。第1面と第2面で表面電流ベクトルの $y$ 成分が大きく異なることから第1面の場合は $\phi=0$ がピークとなるが第2面の場合は $\phi=0$ 面で小さくなる。

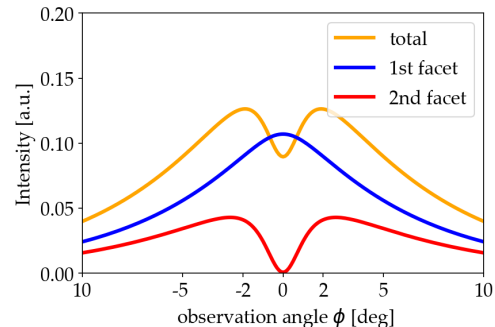


Figure 3: Azimuthal angular distribution ( $\phi$ ) of SPR intensity by single electron @ $\theta=90$  deg.

### 3. 3次元数値計算

#### 3.1 遮蔽効果

回折格子表面に誘起電荷を作るのは過去の電子が発した電場である。このとき、もっとも簡単な場合の幾何

学的な遮蔽効果を考えると過去からの電子の電場が回折格子の構造上遮られて回折格子表面に届かないことが考えられる。ビームエネルギー22 MeV、 $\gamma=43$ 、周期長 $d=600 \mu\text{m}$ 、回折格子の溝の底から電子までの高さ $h=500 \mu\text{m}$ 、傾斜角 $\alpha=6$ 度、頂角90度の回折格子という条件を考えたとき、遅延時間は72ピコ秒である。表面電荷を誘起させるのは22 mm上流に存在していた電子からの電場である。一方で幾何学的な条件を考えると回折格子のある範囲においては遅延時間に存在していた電子の作る電場が遮られている効果を考慮すべきと考えられる。これが遮蔽効果である。Figure 4に遮蔽効果の模式図を示す。

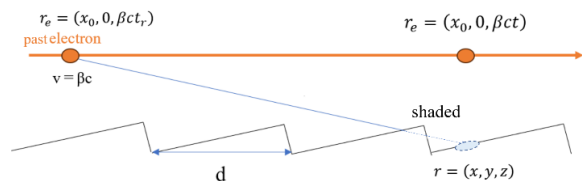
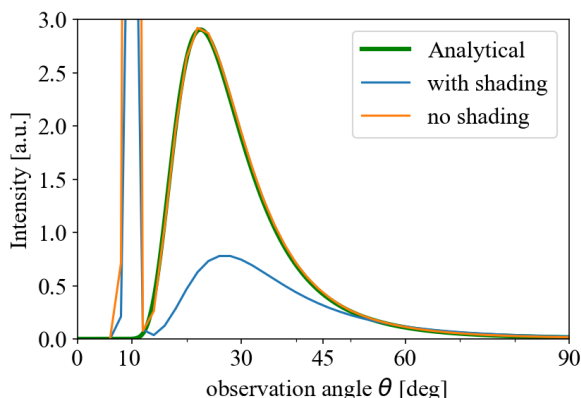


Figure 4: Schematic diagram of shading effect.

### 3.2 数値計算

遮蔽効果を考慮した表面電流モデルを解析的に解くのは容易ではない。そこで三次元数値計算による積分計算を行うことで遮蔽効果の評価を行った。回折格子表面においてメッシュを切ってそれぞれの位置での表面電流ベクトルを $\rho$ と $\mathbf{V}$ から計算する。ある観測点 $l_0\mathbf{n}$ で回折格子表面上の各点 $\mathbf{j}_r$ で作る電場を空間 $\mathbf{r}$  時間 $t$  周波数 $\omega$  について数値積分を行う。メッシュサイズは $y=100 \mu\text{m}$ 、 $z=1 \mu\text{m}$ 、 $t=5 \text{fs}$ とした。積分範囲は $y$ 方向 $\pm 30\text{mm}$ 、 $z$ 方向電子の位置から $\pm 200 \mu\text{m}$ 、時間範囲は1周期の上を通過する前後1 psecである-1 psec~3 psec、周波数積分は共鳴周波数の $\pm 10\%$ について21分割して計算した。遮蔽効果がある場合とない場合及び従来の計算の比較についてFig. 5(a)に $\theta$ 分布、(b)に $\phi$ 分布をしめす。 $\theta$ 分布は6度から90度まで2度ステップ、 $\phi$ 分布は0度から10度まで0.5度ステップの計算結果である。遮蔽効果を考えない場合の計算は従来のモデル計算と当然ながら一致している。一方、遮蔽効果を考えた計算



(a)  $\theta$  distribution

では、 $\theta$ 分布では強度が小さくなり、 $\phi$ 分布では $\phi=0$ 度で強度が小さくならないという計算結果が得られた。

### 3.3 偏光成分

遮蔽効果を考慮した場合、第2面からの放射の寄与がほとんどなくなることを示している。したがって第2面からの放射の表面電流ベクトルの違いから、観測されるべき偏光成分にも大きな違いを生じるものと予期される。第1面からの放射は電場の振動方向が回折格子の溝と垂直であり、第2面からの放射は溝と平行な成分が含まれる。回折格子の溝と平行な電場振動成分がS偏光であり、回折格子の溝と垂直な電場振動成分がP偏光である。すなわち、遮蔽効果を考えない場合は両方の偏光成分があるが考慮した場合はP偏光のみになると考えられる。計算の結果、Fig. 6に示すように遮蔽効果を考えない場合はS偏光とP偏光が存在するが、遮蔽効果を考慮するとほぼ全てがP偏光であるという計算結果が得られた。

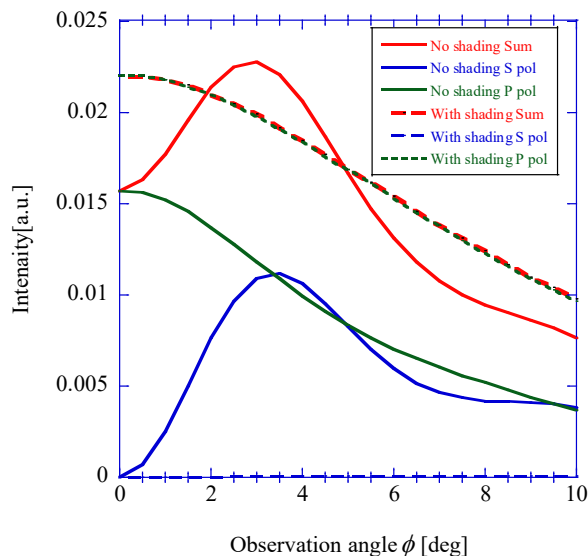
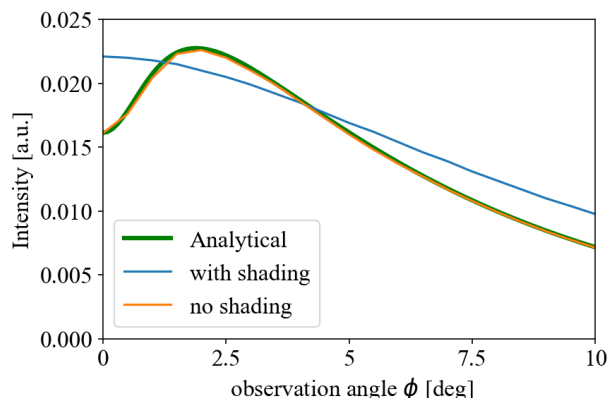


Figure 6: Calculation of polarization components with and no shading effect.



(b)  $\phi$  distribution

Figure 5: Comparison of numerical calculations with and no shading effect and analytical calculation.

#### 4. 偏光測定

計算によって示唆された偏光成分の違いについて実験で確かめた。実験は東北大学電子光理学研究センターの試験加速器 t-ACTS で行った。偏光子にはテラヘルツ域の偏光測定に広く用いられるワイヤグリッドを用いた。ワイヤグリッドの回転角 $\theta_r$ について回折格子と平行な向きを0度と定義する。 $\theta_r = 0$ 度、180度においてはP偏光が100%通過し、90度、270度においてはS偏光が100%通過する。CSPRの検出には、テラヘルツ帯域で高感度・広帯域の焦電型検出器 THz10 (SLT センサーアンドレーザーテック社製)を用いた。偏光測定は光路長を300 mmに保った状態で観測角 $\theta = 45$ 度、60度、90度において行った。偏光測定の結果をFig. 7に示す。いずれの観測角においてもほとんどがP偏光という結果であった。遮蔽効果がある場合とない場合についての直線偏光度を計算し、測定した直線偏光度  $P = (I_0 - I_{90} + I_{180} - I_{270}) / (I_0 + I_{90} + I_{180} + I_{270})$ と比較した。P=1の時100%P偏光であり、-1の時100%S偏光である。Figure 8にそれぞれの直線偏光度を示す。遮蔽効果を考慮した

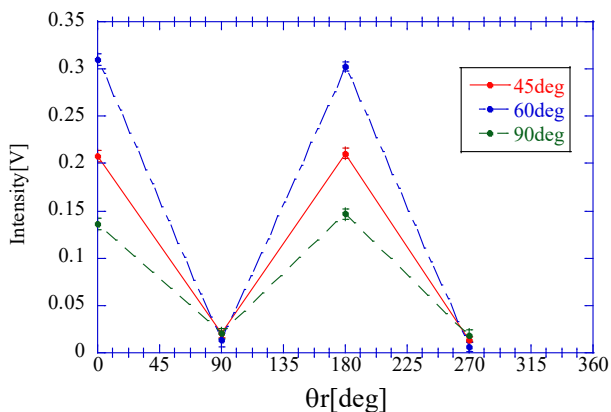


Figure 7: Polarization measurement results.

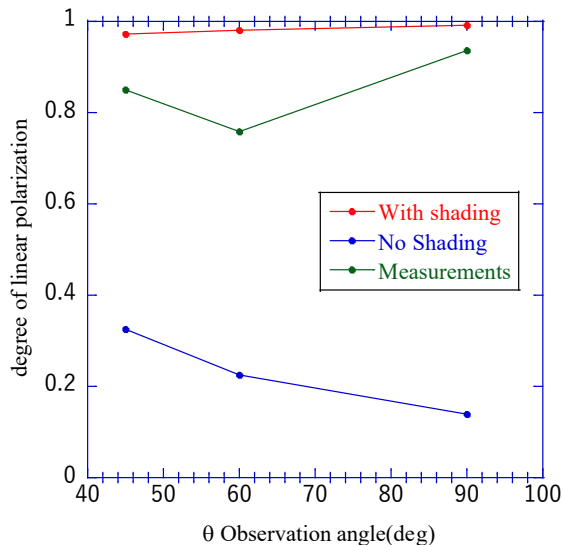


Figure 8: Comparison of calculated and measured linear polarization.

場合の偏光度はほぼ1であり、考慮しない場合の直線偏光度は0.1~0.3である。測定の結果は直線偏光度0.75~0.9であり、遮蔽効果を考慮した計算と矛盾のない結果であった。以前行われた $\phi$ 分布の測定結果についても遮蔽効果を考慮した計算がより適切であると考えられる[4]。これらの測定結果は現在行われている実験条件において遮蔽効果が無視できないことを示している。

#### 5. まとめ

CSPRはビーム非破壊かつシングルショットでの計測が可能なバンチ長モニターとしての応用が期待されている。SPRの分布の計算には表面電流モデルが広く用いられているが、CSPRの角度分布についての我々の測定の結果は従来のSCモデル計算から予想される結果と異なるものだった。そこでSCモデルについて再検討し、従来のSCモデルでは考慮されていなかった幾何学的な遮蔽効果の影響を取り入れた評価を行い、従来のSCモデルと比較した。その結果、三角形の格子面をもった回折格子の場合、遮蔽効果により第1面からの放射の寄与以上に第2面からの放射の寄与がより大きく低減し、このため偏光成分もほぼP偏光のみになることがわかった。また、これらの遮蔽効果を含めた評価結果は、t-ACTSにおけるCSPRの方位角分布や偏光度の測定とも矛盾しないものである。

#### 参考文献

- [1] S. J. Smith and E. M. Purcell, "Visible Light from Localized Surface Charges Moving across a Grating", Phys. Rev. 92, 1069 (1953).
- [2] H. L. Andrews *et al.*, "Reconstruction of the time profile of 20.35 GeV, subpicosecond long electron bunches by means of coherent Smith-Purcell radiation", Phys. Rev. STAB 2014, 17, 052802.
- [3] H. Yamada *et al.*, "スミス=パーセル放射角度分布の計測とバンチ長計測への応用", Proceedings of the 19th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, October 18 - 21, 2022, Online (Kyushu University), pp. 111-114.
- [4] H. Yamada *et al.*, "Study of Coherent Smith-Purcell Radiation in the Terahertz Region Using Ultra-Short Electron Bunches", Particles 2023, 6(3), 693-702.
- [5] J. H. Brownell and G. Doucas, "Role of the grating profile in Smith-Purcell radiation at high energies", Phys. Rev. STAB. 8, 091301 (2005).
- [6] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [7] J. H. Brownell, G. Doucas, "Role of the grating profile in Smith-Purcell radiation at high energies", Phys. Rev. STAB 2005, 8, 091301.