

強収束ラティスにおける低次コヒーレント振動モードの直接的チューン計測 DIRECT MEASUREMENT OF THE TUNES OF LOW-ORDER COHERENT OSCILLATION MODES IN A STRONG FOCUSING LATTICE

伊藤清一, 倉内太道, 檜垣浩之, 岡本宏己

Kiyokazu Ito*, Taido Kurauchi, Hiroyuki Higaki, Hiromi Okamoto

AdSM, Hiroshima Univ

Abstract

An intense charged-particle beam exhibits a complex collective feature by the Coulomb interaction. The motion can be expressed as the superposition of many collective modes. The stability of the whole beam will seriously be affected when the tune of a low-order collective oscillation mode comes close to that of a Fourier harmonic in the periodic driving potential. The collective motion of an ion plasma in a linear Paul trap (LPT) is shown equivalent to that of a beam traveling through an alternating-gradient (AG) focusing lattice. In ion plasma experiments, strong ion losses induced by the coherent betatron resonance have been observed. In the present study, we perform the direct measurement of dipole and quadrupole coherent oscillation mode in the LPT by detecting image currents induced on the electrodes' surfaces. The coherent oscillation tune can be evaluated by frequency analysis of image currents. The measured tune of the quadrupole mode is used to deduce the tune depression.

1. 序論

位相空間密度の高いビームは、クーロン場を介して集団的に振る舞うことが知られている。このコヒーレント運動は様々な振動モードの重ね合わせとして表現でき、各モードは荷電粒子の密度分布によって決まる振動数を持つ。特定モードの固有振動数と外場の振動数が一定の関係を満たすとビームは共鳴的に不安定化する。特に、低次のコヒーレント振動による共鳴はビーム全体の安定性に深刻な影響を与える。そのため、この種の空間電荷効果を熟知することは次世代の高性能ハドロン加速器を設計する上で極めて重要である。

参考文献 [1] によれば、 m 次のコヒーレント振動のチューン Ω_m は、

$$\Omega_m = m(\nu_0 - C_m \Delta \bar{\nu}) \quad (1)$$

と表される。ここで、 ν_0 はベアチューン、 C_m は m に依存する定数である。 $\Delta \bar{\nu}$ はクーロン反発力により生じるチューンシフトを表す。ただし、これは分布関数から一意に決定される二乗平均平方根 (rms) チューンシフトであり、ビームを構成する粒子毎に別個に定義されるインコヒーレントチューンシフトとは明確に異なる概念である。コヒーレント共鳴条件は次のように表される。

$$\Omega_m \approx \frac{n}{2} \quad (2)$$

ここで、 n は整数である。ただし、外場が駆動する共鳴では n は偶数となる。一方、自己場が駆動する共鳴では n は奇数、偶数の両方を取ることができる。前者の場合、Eq. (2) は Sacherer が示したコヒーレント共鳴条件 [2] とチューンシフトの定義を除けば一致する。

線形ポールトラップ (LPT) はイオンプラズマを断面方向には四重極高周波電圧により、軸方向には静電場で

捕捉する装置である。この断面方向の閉じ込め原理は加速器の強収束と全く等価である。従って、LPT に捕捉したイオンプラズマの物理的性質を調べることで、高密度ビームの集団運動に対する理解を深めることができる [3]。広島大学では小型非中性プラズマトラップシステム S-POD を用い、加速器ビームにおける様々な空間電荷効果の実験的研究を進めてきた [4-7]。本研究では LPT の四重極電極の内、一組の電極に流れるイメージ電流から、イオンプラズマの双極モード ($m = 1$) と四重極モード ($m = 2$) のコヒーレント振動を同定し、各モードのチューンを測定した。

2. 実験装置・手順

Figure 1 に実験装置の概略図を示す。四重極電極は半径 5.75 mm の円柱電極で構成され、様々な実験に対応できるように軸方向に 5 つの領域に分割されている。主たるプラズマ閉じ込め領域は半径 5 mm、長さ 50 mm である。LPT はベース圧力 1×10^{-7} Pa 以下の超高真空中に設置してある。捕捉イオン種には、これまでの広島大学での実験と同様、取り扱いが容易な $^{40}\text{Ar}^+$ を採用した。

典型的な実験手順を以下に示す。まず、真空容器中に

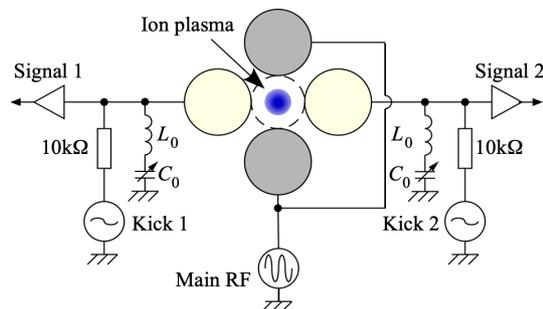


Figure 1: Schematic drawing of the LPT electrodes (cross-sectional view) together with the perturbation driver and image current detector.

* kzito@hiroshima-u.ac.jp

中性の Ar ガス ($\leq 2 \times 10^{-5}$ Pa) を導入する．四重極電極のうち垂直方向のペアにのみ断面方向閉じ込め用の rf 電圧を印加する．捕捉領域両端の電極にはこれに加えて 20 V の直流電圧を印加して軸方向閉じ込め場を形成する．ここに電子ビーム (135 eV, $\sim 100 \mu\text{A}$) を打ち込み，捕捉領域内で生成した Ar^+ を捕捉する．捕捉イオン数は電子ビーム電流と導入ガス圧により制御する．

加速器のラティス構造に相当するのは LPT においては rf 電圧の波形である．通常の LPT では正弦波を用いるが，S-POD では実際の加速器のラティス構造をより再現するために矩形波を印加することもできる．ただし，最も基本的な収束構造である“FODO”は正弦波で良く再現できる [7] ので，本実験では矩形波より単純で取り扱いの容易な正弦波 (周波数 $f_{\text{rf}} = 1$ MHz) を採用した．ペアチューンは rf 電圧の振幅により調整する．本実では垂直方向，水平方向ともに単位収束セル当たり (rf 電圧の 1 周期) のペアチューンが $\nu_0 = 0.162$ となるように調整しており，この時の振幅はおおよそ 90 V である．

$\nu_0 = 0.162$ では，捕捉したイオンプラズマは安定でありコヒーレント振動はあっても非常に小さい．四重極電極のうち水平方向のペアに適切なキックを印加することでコヒーレント振動を励起する．それぞれのモードの対称性から，二つの電極に逆符号のキックを印加すれば双極モードを，同符号であれば四重極モードを選択的に励起することができる．ただし，本実験で使用したキッカーでは 1 パルスで振動を励起することができなかった．そこで，各モードの振動数に近い周波数 f_k を持つ正弦波で複数回キックすることで，共鳴的にコヒーレント振動を励起することにした．キックの振幅 V_k とキックの回数 N_k は捕捉しているイオンが損失しないレベルに調整する．

キック印加終了後，水平方向の電極ペアに流れるイメージ電流を検出する．振動モードと検出電極の対称性から，各電極に流れる電流の振幅と周波数は等しくなる．一方で，各電流の位相は双極モードでは逆相に，四重極モードでは同相になる．従って，二つの電極で独立に検出した信号を引き算した時にのみ残るのが双極モードであり，足し算した時にのみ残るのが四重極モードである．

水平方向電極ペアにはイオン捕捉のための rf 電圧は印加していないが，静電結合により $f_{\text{rf}} = 1$ MHz の非常に強い信号が混入してくる．これを抑制するために，インダクタ L_0 とコンデンサ C_0 からなる中心周波数 1 MHz，共振の鋭さ ~ 300 のノッチフィルタを挿入している．フィルターされた信号を増幅した後，垂直分解能 12 bit のデジタルオシロスコープで記録する．記録した信号を離散フーリエ変換を用いて周波数解析することで各モードの振動数を得る．典型的には，データのサンプリング周波数は 250 MHz でデータ長は 1 ms (単位収束セル 1×10^3 個に相当) である．従って，ナイキスト周波数は 125 MHz で，離散フーリエ変換後の周波数分解能は 1 kHz となる．

3. 実験結果

3.1 双極モード

まずは，励起・検出がより容易であると考えられる双極モードの実験を行なった．双極モードは $m = 1$ であ

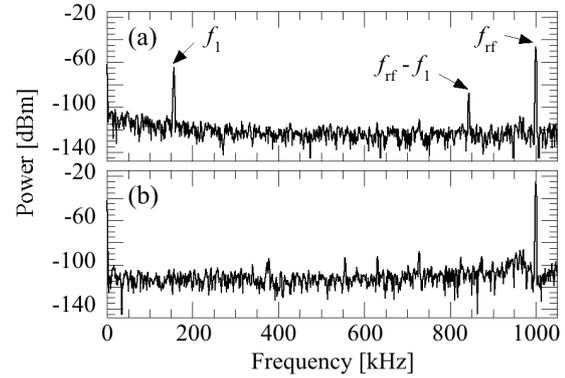


Figure 2: Example of the frequency spectrum of an ion plasma initially perturbed by dipole kicks. These spectra are calculated from the difference between signals (a) and the sum of signals (b), respectively.

り，プラズマ断面形状の変化を伴わない剛体的な重心振動である．従って，双極モードではいわゆる自己場によるチューンシフトは生じない，すなわち $C_1 = 0$ である． $m = 1$ と $C_1 = 0$ を Eq. (1) に代入すると，双極モードのチューンは $\Omega_1 = \nu_0$ と求められ，本実験における振動数は $f_1 = \Omega_1 f_{\text{rf}} = 162$ kHz である．従って，キックの周波数を $f_k \sim 160$ kHz とした．また， $V_k = 18$ mV, $N_k = 5$ とした．

検出された信号の差から得られたフーリエスペクトルの例を Fig. 2(a) に示す．157 kHz, 842 kHz, 1 MHz に明らかなピークが観測される．一方，Fig. 2(b) に示す信号の和のフーリエスペクトルでは 157 kHz と 842 kHz のピークは消失する．従って，この二つの振動は双極モードの対称性を有していることがわかる．157 kHz は f_1 と良く一致しており，双極モードのコヒーレント振動の信号と結論づけられる．一方，842 kHz は $f_{\text{rf}} - f_1$ と一致するので，プラズマのエンベロープ振動の基本波と双極モードのコヒーレント振動の結合により生じた信号と考えられる [8]．1 MHz は f_{rf} と一致しており，また，プラズマがなくても観測されるので閉じ込め用 rf 電圧による信号である．

これらのピークの半値半幅は約 1 kHz と非常にシャープであり，その程度の精度で各ピークの中心周波数を決定することが可能である．本実験の場合，この拡がりには離散フーリエ変換の分解能で決まっており，振動数の広がりも反映しているわけではない．

双極モードのコヒーレントチューン Ω_1 の捕捉イオン数依存性を Fig. 3 に示す．本実験のイオンプラズマは，半径は約 1.2 mm，軸長は 30 mm で，これらはイオン数に大きくは依存しない [5]．従って，イオン数の変化はほぼ密度の変化と考えることができる．前述のように，双極モードには自己場によるチューンシフトは存在しない．しかし，実際にはイオン数の増加に伴わないチューンは減少し，イオン数 4×10^6 でおおよそ 4% のチューン降下が観測される．これは，電極に誘起されるイメージ電荷による影響であり [6]，加速器ビームで言うところの Laslett チューンシフト [9] に相当する．

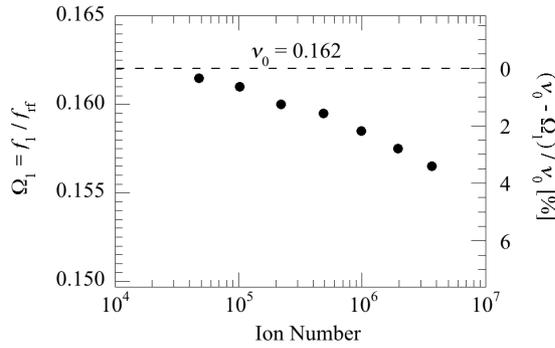


Figure 3: Intensity dependence of Ω_1 and its tune shift.

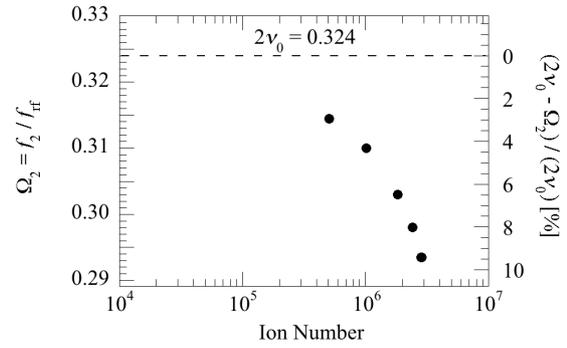


Figure 5: Intensity dependence of Ω_2 and its tune shift.

3.2 四重極モード

次に、四重極モードのコヒーレント振動の励起と検出を試みた。四重極モードは $m = 2$ であり、プラズマ断面の変形を伴う。Equation (1) に $m = 2$ を代入すると、四重極モードのコヒーレントチューンの目安として $\Omega_2 < 2\nu_0$ を得る。従って、本実験での四重極モードの振動数は $f_2 < \Omega_2 f_{rf} = 320$ kHz である。ここでは 10% 程度のチューンシフトを見込んで、 $f_k \sim 290$ kHz とし、 $V_k = 700$ mV、 $N_k = 15$ のキックを印加した。双極モードの場合に比べ V_k と N_k が大きい、すなわちより強いキックが必要なのは、四重極モードの成長率が双極モードのそれに比べ小さいためである。

検出された信号の差から得られたフーリエスペクトルの例を Fig. 4(a) に示す。この場合、1 MHz にしか有意なピークは存在しない。一方、Fig. 4(b) に示す信号の和から計算したフーリエスペクトルでは 298 kHz と 702 kHz にもピークが観測される。従って、298 kHz と 702 kHz のピークが四重極モードの対称性を有していることがわかる。298 kHz は予想された f_2 と近く、四重極モードのコヒーレント振動によるピークと結論づけられる。702 kHz は $f_{rf} - f_2$ と一致するので、プラズマのエンベ

ロープ振動の基本波と四重極モードのコヒーレント振動の結合により生じたと考えられる [8]。1 MHz に観測されるのは主に閉じ込め場による信号である。双極モードの時と同じく、これらのピークも半値半幅は約 1 kHz であり、やはり離散フーリエ変換の分解能で決まっていると考えられる。

四重極モードのコヒーレントチューン Ω_2 の捕捉イオン数 (\approx 粒子密度) 依存性を Fig. 5 に示す。イオン数の増加に伴ないチューンは減少する。その度合いは双極モードに比べ大きく、四重極モードではイオン数が 3×10^6 でのチューン降下は約 10% に達する。これは自己場、いわゆる空間電荷効果、に起因するチューンシフトである。

Figure 5 に示したチューンシフト量は四重極モードのコヒーレント振動のチューンシフト量であり、rms チューンシフト $\Delta\bar{\nu}$ ではない。エンベロープ方程式から一意に決定できる $\Delta\bar{\nu}$ と、そこから定義される rms チューン効果率

$$\eta \equiv \frac{\nu_0 - \Delta\bar{\nu}}{\nu_0} \quad (3)$$

を評価することは実験と理論、数値計算を比較する上で重要である。Equation (1) と Eq. (3) から $\Delta\bar{\nu}$ を消去して、 $m = 2$ とすると、

$$\eta = 1 - \frac{1}{C_2} \left(1 - \frac{\Omega_2}{2\nu_0} \right) \quad (4)$$

を得る。rms エンベロープ方程式の摂動解析からは $C_2 = 3/4$ と予想されている [10, 11]。エンベロープ方程式はプラズマ断面の分布が楕円であることしか要求しておらず、その中の粒子分布には依存しない。従って、本実験においても $C_2 = 3/4$ と仮定することは十分に妥当であると言える。 $C_2 = 3/4$ と仮定し Eq. (4) を使うと、 Ω_2 から η を評価することができる。

Figure 6 に η の粒子数依存性を示す。黒丸は本実験で得られた Ω_2 から評価した η である。白丸は、ほぼ同じ構造の LPT を用いて $\nu_0 \sim 1/8$ での共鳴による粒子損失の生じるチューンから評価した η である [4]。両者はよく一致する。ただし、粒子損失はある程度の幅を持つため、どうしても図中エラーバーで示すように 5% 程度の不確定性を持つ。一方、コヒーレント振動の直接計測ではその振動数を 1 kHz の精度で測定することができる。

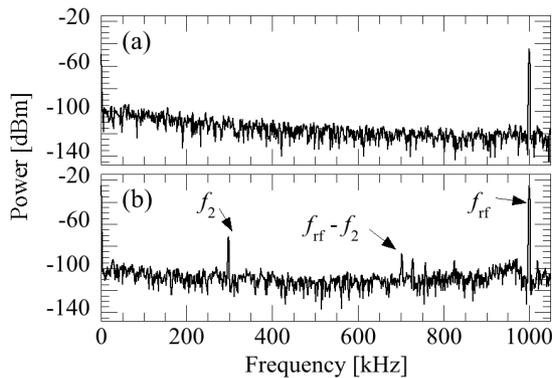


Figure 4: Example of the frequency spectrum of an ion plasma initially perturbed by quadrupole kicks. These spectra are calculated from the difference between signals (a) and the sum of signals (b), respectively.

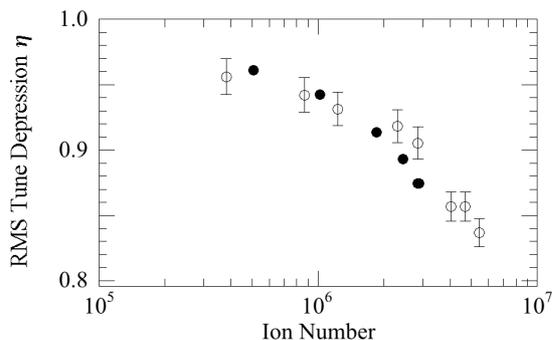


Figure 6: Rms tune depression estimated from the measurement data in Fig. 5 (black dots). For comparison, we have added the previous experimental data (open circles) given in Ref. [4].

本実験では $f_2 \sim 300$ kHz なので, Ω_2 即ち η を 0.5% 程度とこれまでに比べ桁良い精度で決定できる。

4. まとめ

本研究では LPT の四重極電極のうち一組を検出用電極に用い, この電極に流れるイメージ電流によりイオンプラズマの双極モード ($m = 1$) と四重極モード ($m = 2$) のコヒーレント振動を検出することに成功した。検出した信号を離散フーリエ変換をもちいて周波数解析することで, コヒーレント振動の周波数を 1 kHz 程度の精度で決定した。これは典型的な S-POD 実験において 1% より良い精度でコヒーレントチューンを決定できること意味しており, これまで用いてきた粒子損失が生じるチューンからの評価方法に比べ約 10 倍の精度が得られる。

この手法により各モードのチューンの密度依存性を測定し, 以下の結果を得た。

1. 双極モードのチューンはイオン数の増加に伴い減少した。理論的には双極モードの振動は自己場の影響を受けない ($C_1 = 0$)。従って, このチューンシフトは電極表面に誘起されるイメージ電荷により引き起こされたと考えられる。
2. 四重極モードのコヒーレント振動ではより大きなチューンシフトが観測された。これはいわゆる空間電荷効果によるチューンシフトである。
3. 観測された四重極モードのチューンから評価した rms チューン降下率はこれまでの実験で評価したそれとよく一致した。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP17K05120 と JP18H03472 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] H. Okamoto and K. Yokoya, “Parametric resonances in intense one-dimensional beams propagating through a peri-

odic focusing channel”, Nucl. Instrum. Meth. A **482**, 51 (2002).

- [2] F. J. Sacherer, “Transverse space-charge effects in circular accelerators”, Ph.D Thesis, Lawrence Radiation Laboratory, 1968; Report No. UCRL-18454, 1968.
- [3] H. Okamoto *et al.*, “Radio-frequency quadrupole trap as a tool for experimental beam physics”, Nucl. Instrum. Meth. A **485**, 244 (2002).
- [4] R. Takai *et al.*, “Nonlinear resonance effects in a linear Paul trap”, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 014802 (2007).
- [5] K. Ito *et al.*, “Determination of Transverse Distributions of Ion Plasmas Confined in a Linear Paul Trap by Imaging Diagnostics”, Jpn. J. Appl. Phys. **47**, 8017 (2008).
- [6] K. Moriya *et al.*, “Double stop-band structure near half-integer tunes in high-intensity rings”, Phys. Rev. Accel. Beams **19**, 114201 (2016).
- [7] K. Ito *et al.*, “Coherent resonance stop bands in alternating gradient beam transport”, Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 064201 (2017).
- [8] K. Ito *et al.*, “Effect of quadrupole focusing-field fluctuation on the transverse stability of intense hadron beams in storage rings”, Prog. Theor. Exp. Phys. **2018**, 023G01 (2018).
- [9] L. J. Laslett, “On intensity limitations imposed by transverse space-charge effects in circular particle accelerators”, BNL Report No. 7534, 1963, pp. 325 - 367.
- [10] R. Baartman, “Betatron resonances with space charge”, AIP Conf. Proc. **448**, 56 (1998).
- [11] M. Reiser, *Theory and Design of Charged Particle Beams* (John Wiley & Sons, New York, 2008) and references therein.