

## 励磁電流の安定性の時系列解析による予測制御

### PREDICTION CONTROL BY TIME SERIES ANALYSIS ON STABILITY OF MAGNET CURRENT

尾崎俊幸<sup>#, A)</sup>

Toshiyuki Ozaki<sup>#, A)</sup>

<sup>A)</sup> Accelerator Laboratory, KEK

#### Abstract

The high accuracy current measurements of two magnets were performed by 24 bit ADC. One is bending magnet and other is back-leg coil. The current ripple component of the former is neglected to the current stability, but the latter is comparable. This paper treats the ripple as large noise of gaussian distribution. The stability is analyzed by time-space method based on kalman filter. The possibility of prediction control is proposed to improve the current stability.

#### 1. はじめに

PF-AR の電磁石電源である偏向電磁石電源とバックレグ電源の電流モニター出力を 24bit の ADC で読み、時系列データとした。そのデータから、電流の変動のトレンドを状態空間モデルで分析した。

偏向電磁石電源は、最大定格 1500A 1200V の大電源で、電流安定度の仕様は 100ppm 以内で、電流リップル実効値は 1ppm 以内である。バックレグ電源は、±10A ±50V の小型電源で電流安定度の仕様は±300ppm 以内である。スイッチング電源であり、高周波リップル電圧やノイズは大きい。この影響を論じる。

#### 2. 状態空間モデルによる時系列解析

##### 2.1 カルマンフィルタ

カルマンフィルタでは、システムを状態方程式と観測方程式で記述し、新たなデータを加わる度に、状態を修正し、推定を確かなものにする。本論文では、理論および数式の定義や記号は、北川の表記を用いる[1, 2]。

カルマンフィルタは

$$x_n = F_n x_{n-1} + G_n v_n \quad \text{状態方程式}$$

$$y_n = H_n x_n + w_n \quad \text{観測方程式}$$

で表現される。

カルマンフィルタでは、状態ノイズ  $v_n$  と観測ノイズ  $w_n$  を仮定して進める。

以下に述べるベイズ統計、確率分布関数、それらの積の評価関数から、状態（真値）を推定する。

##### 2.2 ベイズ統計

事象 A が起きる確率を  $P(A)$  と表記すると、事象 A と B の同時確率  $P(A, B)$  は、順番によらず、

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

であるはずである。単純な変形をした式

<sup>#</sup> ozaki@post.kek.jp

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

が、ベイズの定理である。18世紀の数学者トーマス・ベイズが提唱した。この「逆確率」の思想、つまり、結果（観測）から原因（状態）を推定する思想は、近年に復興された[3]。

##### 2.3 最尤法

時系列の観測データの同時確率を求めるにあたり、マルコフ連鎖条件

$$P(y_i | y_{1:t-1}) = P(y_i | y_{i-1})$$

を仮定する。これは、 $y_i$  に関して 時点(t-1)までの観測値全てによってもたされる情報が、直前の  $y_{i-1}$  のみによってもたされる情報と同じであることを意味している。

観測値が  $y_i$  で状態が  $x_i$  である確率分布は

$$p(x_i | y_i) = \int p(x_i | x_{i-1}) p(x_{i-1} | y_{i-1}) dx_{i-1}$$

で、時刻 t-1 での分布を与えられれば、状態  $x_i$  の分布は  $x_{i-1}$  に関して積分になることで与えられる。この現在・過去の状態の関係が状態方程式で、同時刻の  $x$  と  $y$  の関係が観測方程式である。

時系列の観測データ  $(y_1, y_2, \dots, y_t)$  と状態  $(x_1, x_2, \dots, x_t)$  の同時出現確率は、それらの個々の分布関数の積で与えられる

通常は、ガウス分布

を仮定して 状態推定の平均値  $\mu_t$  と標準偏差  $\sigma$  を所与として、事後確率を最大とする解を最尤法で求める。

##### 2.4 モデル評価

上記のガウス分布の対数を取り、和で評価できる対数

$$p(y_i | \mu_i, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

尤度関数

$$l(\theta) = \sum_{n=1}^N \log\{p(y_n | y_1, \dots, y_{n-1}, \theta)\}$$

を最小にするパラメーター  $\theta = (\mu, \sigma^2)$  を最尤法で選ぶのが通常である。

さらに、赤池情報量基準(AIC)、つまり

$AIC = -2 \times (\text{最大対数尤度}) + 2 \times (\text{パラメーター数})$   
がモデルの良し悪しを決める。低い数字のモデルが採用される。

### 3. 偏向電磁石電源の電流の変動

#### 3.1 偏向電磁石電源の電流

偏向電磁石電源は2008年に更新された。定格1200V 1500Vの電源で、電流安定度100ppm以内、電流リップルはスペクトルの100Hz成分が最大で2ppmである。実効的リップルは、さらに小さく、その影響はほぼ無視できる。

高精度DCCTを偏向電磁石電源の外部につけ、その出力を24bitのADC(インターフェイス社LPC-320724)で読んで記録した。

10Hzで約1000回のデータを得た。これを16区分に分けて、平均値と分散を計算した。図1の上図に平均値を、図1の下図に分散(標準偏差)を示した。このように共に変動している。分散の変動は、定常カルマンフィルタの問題となる。

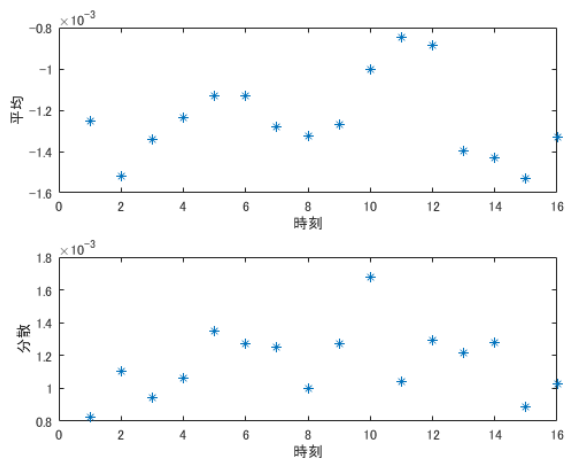


Figure 1: Incorrect models.

しかしながら、図1のような時系列モデルにおいては、その分割された区間に対し時間に依存しないモデルを適用しても良い結果は得られない。時間変動を生み出す動的な構造(ダイナミクス)をモデリングしない限り、モデルの評価と改善と言うサイクルがうまく機能しないからである[4]。その動的モデルとしてカルマンフィルタを利用する。

#### 3.2 トレンド・モデル

時系列解析では、状態のレベルとスロープが変化していると解釈するトレンド・モデルが一般的である。PF-ARステアリング電源の電流を16bitのADCで読んで、電流のトレンドを推定した報告がある[5]。

時系列  $y_n$  のモデルとして  $y_n = \mu_n + \varepsilon_n$  を考える。ここで、 $\mu_n$  は、時点  $n$  における  $y_n$  の平均値で、 $\varepsilon_n$  は観測ノイズである。平均  $\mu_n$  は

$$\mu_n = 2\mu_{n-1} - \mu_{n-2} + v_n$$

と言う2階の確率差分方程式に従って変動するものとする。 $v_n$  は状態ノイズである。

カルマンフィルタ方程式のスタイルで

$$x_n = \begin{bmatrix} \mu_n \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_n = \varepsilon_n \quad v_n = v_n \text{ と書ける。}$$

偏向電磁石の電流を、100秒毎に取得したデータの200点で、平滑化の計算した結果を図2に示す。平滑化は注目する時点の前後の情報を用いるので、予測やフィルタよりも精度の良い推定を行うことができる。平滑化計算は知識発見に有用である。

図2が示す事は、5時間30分で4回ほど揺らぎ、その大きさは、1400AのDC電流に対して、 $\pm 0.1A$  である。

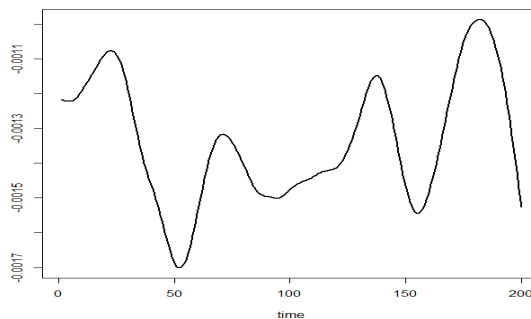


Figure 2: Trend model.

#### 3.3 3次のトレンド・モデル

観測モデルを  $y_n = \mu_n + w_n$  として、観測ノイズを

$$w_n \sim N(0, \sigma^2) \text{ として、状態を } \mu_n = \sum_{i=1}^k C_i \mu_{n-i} + v_n \text{ と}$$

し、状態ノイズを  $v_n \sim N(0, \tau^2)$  とする。

$k=3$  の場合のカルマンフィルタ方程式は

$$x_n = \begin{bmatrix} \mu_n \\ \mu_{n-1} \\ \mu_{n-2} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

として、前章と同じ計算をする。

計算の結果のAICは、表1に示すように、前節のモデルより悪いことになった。

#### 3.4 自己回帰(Auto-Regressive, AR) モデル

3次のARモデルでは、観測方程式を

$$y_n = \sum_{i=1}^3 \alpha_i y_{n-i} + w_n$$

と書く。ここで、 $w_n$  は、白色ノイズで、平均値0、分散  $\sigma^2$  の正規分布をしていると仮定する。係数  $\alpha$  を状態と見なし、 $H$  を遷移行列とする。3次にしたから、

$$x_n = (\alpha_1(n), \alpha_2(n), \alpha_3(n))^t$$

$$F = I_3$$

$$H_n = (y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3})$$

及び  $v_n = 0$  とおく。モデルは

$$x_n = F_n x_{n-1} + G_n v_n$$

$$y_n = H_n x_n + w_n$$

と表現されるが、状態式は恒等式に過ぎない。このARモデルの尤度関数は、

$$f(y | \alpha, \sigma^2) = \prod_{i=1}^N f(y_i | y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \sigma^2)$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_j^3 \alpha_j y_{i-j} \right)^2 \right\}$$

であり、データ数は、100秒間隔の967個である。

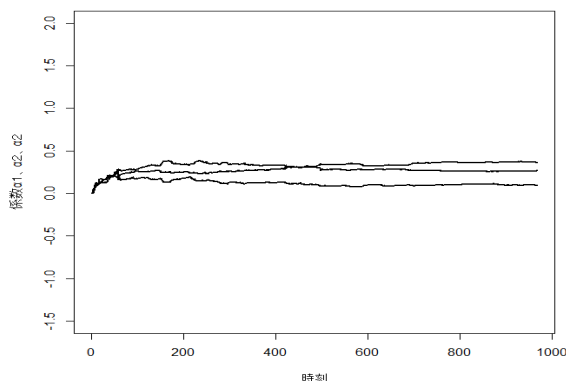


Figure 3: Auto-regression model of order 3.

図3に示すように、 $n$ が増えると推定値が落ち着き、最後は、 $\alpha_1=0.2662$ ,  $\alpha_2=0.3605$ ,  $\alpha_3=0.0928$ である。

### 3.5 モデルの評価

上記のモデルをAICで比較する。

Table 1: AIC Value for Models

モデル	AIC
トレンド	-10126.46
3次トレンド	-9524.042
自己回帰	-10053.47

## 4. バックレグ電磁石の電流の変動

### 4.1 バックレグ電源の特徴

PF-AR 補正電磁石(ステアリング、バックレグ)の電源はDC50V10Aのバイポーラ電源である。電流データに対してスイッチング・ノイズの影響が無視できない。本論文では、バックレグ電源を検討の対象とした。

電流データ測定は、盤面のBNC端子から0.1~0.01Hzの間隔で得た集合である。他方、スイッチング周波数は100kHzである。測定データ6504点をヒストグラムにした。図4は、凡そガウス分布である。厳密には、粒子フィ

ルタ法の利用であるが、計算の容易さからガウス分布とし、検討を進める。この変動を状態ノイズとして解釈し、検討を行う。

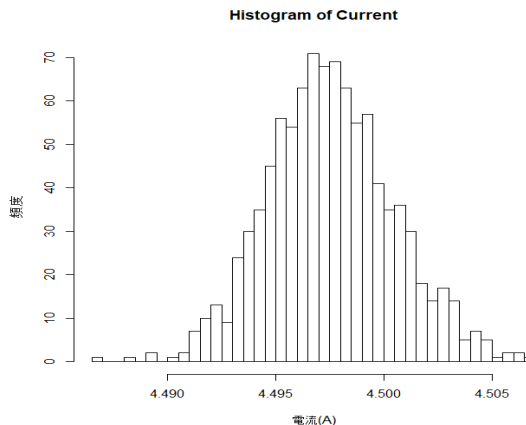


Figure 4: Histograms of data.

### 4.2 モデルの評価

各モデルのAICを求めた。これを表2に示すが、表1に比べ、モデル精度が悪い。

表2から、バックレグ電源の場合には、自己回帰モデルが最適である。

Table 2: AIC Values for Models

モデル	AIC
トレンド	-8104.906
3次トレンド	-8137.970
自己回帰	-8277.172

### 4.3 自己回帰モデル

自己回帰モデルの係数の変化を図5に示す。最後には  $\alpha_1=-0.0872$ ,  $\alpha_2=0.0295$ ,  $\alpha_3=-0.0418$  である。係数が、単位円内にあるから安定解である。図5は平均値の時間変動を示す。標準偏差量まで含めて図示すれば、太い川のような結果になる。2倍標準偏差範囲は、それぞれ順に  $(-0.1513 \sim -0.0232)$ 、 $(-0.0352 \sim 0.0943)$ 、 $(-0.1065 \sim 0.0227)$  である。

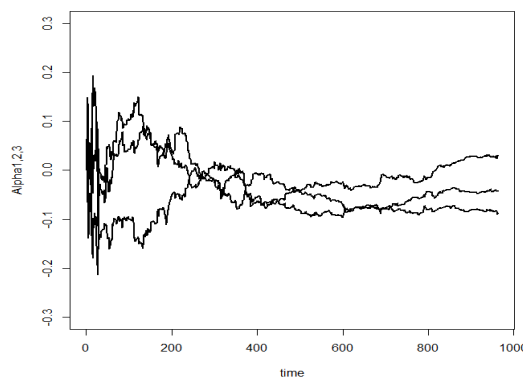


Figure 5: Auto-regression model of order 3.

## 5. ベイズ決定による予測制御

予測技術の典型的な例は、天気予報で、カルマンフィルタを用いている[6]。状態空間モデルでの予測機能の有用性は、商店の売り上げ、お掃除ロボットの制御などで示されている。

### 5.1 カルマンフィルタの予測の利用

カルマンフィルタでは、予測と推定を繰り返す。予測ステップが終了した後に、測定データが入り、その差にカルマンゲインを乗算した数値が加算され、推定値となる。

【一歩先予測】

$$x_{n|n-1} = F_n x_{n-1|n-1}$$

$$V_{n|n-1} = F_n V_{n-1|n-1} F_n^T + G_n Q_n G_n^T$$

【フィルタ】

カルマンゲイン

$$K_n = V_{n|n-1} H_n^T (H_n V_{n|n-1} H_n^T + R_n)^{-1}$$

を用いて、次の状態の推定は

$$x_{n|n} = x_{n|n-1} + K_n (y_n - H_n x_{n|n-1})$$

$$V_{n|n} = (I - K_n H_n) V_{n|n-1}$$

であり、この2段階ステップを図6のように繰り返す。つまり、逐次計算となり、優れたアルゴリズムとして、アポロ計画に採用された。

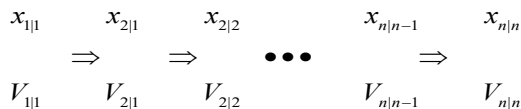


Figure 6: Algorithm of kalman filter

#### 5.1.1 偏向電磁石電源の場合

状態ノイズとして、電流リップルが等価な影響があるとして、直流電流に対して、0.1ppm(rms)のノイズが乗ると仮定した。観測ノイズは、測定ケーブルを50Ωで終端して、ADCに記録し、0.242mV(rms)を得た。

カルマンフィルタを100点まで計算した。これを図7に示す。最初の5点は安定していないので除外して考える。

初期値がもたらす影響の問題があり、今後の課題としたい。青の破線が予想値で、直後に赤米印★の実測値が入る。徐々に予想の振幅が小さくなっていく。

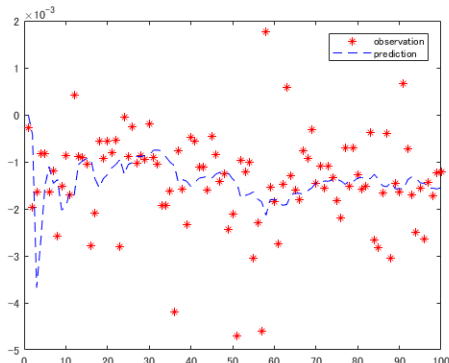


Figure 7: Predictions for bending magnet case.

#### 5.1.2 バックレグ電磁石電源の場合

状態ノイズとして、スイッチング・ノイズの100ppm(rms)があるととした。観測ノイズは、測定ケーブルを50Ωで終端して、ADCに記録し、0.268mV(rms)を得た。カルマンフィルタを100点まで計算した。これを図8に示す。青の破線が予想値で、直後に赤い米印★の実測値が入る。

電流リップルの変動の影響が大きすぎて、予測の乱高下が極めて大きい。それは967点まで求めても、ほとんど変わらない。

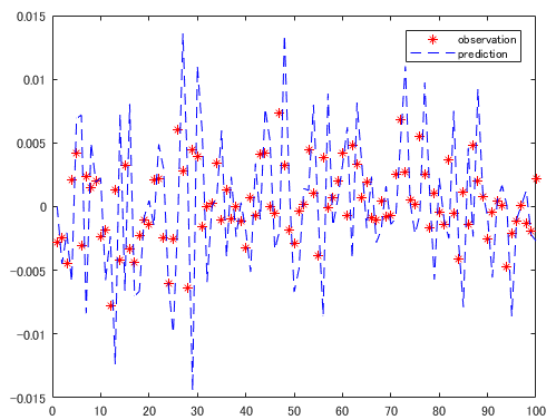


Figure 8: Predictions for back-leg coil case.

### 5.2 自己回帰モデルによる未来予測

前章でシステム同定した $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ で自己回帰モデル

$$y_i = \alpha_1 y_{i-1} + \alpha_2 y_{i-2} + \alpha_3 y_{i-3}$$

を用いる。

現在のデータが解れば、一歩先の未来に対して、

$$y_{i+1} = \alpha_1 y_i + \alpha_2 y_{i-1} + \alpha_3 y_{i-2}$$

が成り立つはずで、未来が予測できる。

#### 5.2.1 偏向電磁石電源の自己回帰モデル

図5において、係数が安定していて最終数値と変わらない時刻から未来を予測してみる。800ポイントの位置から未来を予測してみる。図9において予測が青の破線であり、計測値が赤米印★である。

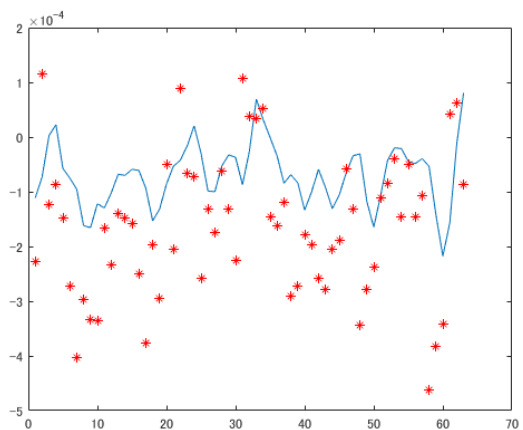


Figure 9: Prediction model based on Figure 3.

### 5.2.2 バックレグ電磁石電源の自己回帰モデル

図10において、予測が青の破線であり、計測値が赤い\*である。計測値にはリップル電流の影響で乱高下が激しいが、推定電流が非常に安定している事を示している。

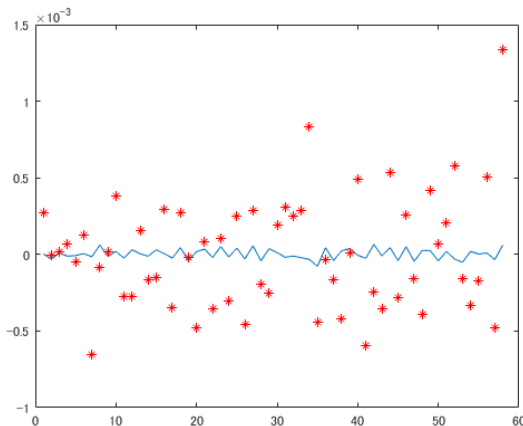


Figure 10: Prediction model based on Figure 5.

### 5.3 予測制御の可能性

電流リップルの少ない場合は、カルマンフィルタを用いて逐次計算できるが、電流リップルが無視できない場合は、安定しない。カルマンフィルタのゲインは、状態ノイズと観測ノイズの比に関係していて、偏向電磁石電源の場合は、収束が早い、バックレグ電源の場合は、ほとんど収束しないと解釈して良いと思われる[7]。後者の場合は、間接的な手法であるが、自己回帰モデルを用いるのが良いと結論した。実際の利用には、時変係数回帰モデルが期待できる。

## 6. 展望

電源の電流揺らぎに対して、その揺らぎを正確に記録する事を目指した。さらに超安定化電源を実現するため、補正電流のフィードフォワード制御のプログラムを目指すものである。

カルマンフィルタは、「アポロの頭脳」と言われ、月面着陸50年の今日、その偉業が注目されている[8]。今後、加速器の制御にも利用の可能性を見出したい。

## 参考文献

- [1] Genshiro Kitagawa, “Introduction to Time Series Modeling”, CRC Press (2010).
- [2] 北川源四郎, “時系列解析入門”, 岩波書店 (2005年).
- [3] 松原望, “入門 ベイズ統計 [意思決定の理論と発展]”, 東京図書 (2008年).
- [4] 関口知之, “予測にいかす統計モデリングの基礎”, 講談社 (2011年).
- [5] T. Ozaki, “Kalman filter estimation on current stability of magnet”, Proceedings of the 13th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, Chiba, Japan, Aug. 8-10, 2016, pp. 1227-1229.
- [6] 西本洋相, “気象予報士の天気学 第2章 天気予測技術”, 成山堂 (2004年).
- [7] 足立修一, 丸田一郎, “カルマンフィルタの基礎”, 東京電機大学出版局 (2012年).

- [8] トランジスタ技術, “特集 月面着陸船アポロに学ぶ 確率統計コンピュータ”, CQ 出版社 (2019年7月).