「加速器」Vol. 3, No. 1, 2006（31–43）

専門論文

加速器におけるプラズマ型不安定性
—電子雲とイオン—

大見　和史*

Plasma type of instabilities in accelerators–Electron cloud and ion effects

Kazuhito OHMI*

Abstract

Plasma type instabilities are serious issue in recent high intensity accelerators. Extra-particles, ions or electrons, are created by the beam due to ionization, photoemission, secondary emission and/or other mechanisms.The beam and the extraparticles form non-neutral plasma with diffrent collective velocities. Two-stream instability is caused by the interaction between these two beams with different velocities. We discuss general picture of the two stream instability in accelerators, especially speaking three typical effects; e-p, ion, electron clouds.

1. はじめに

初期の加速器では完璧な真空パイプの中を粒子ビームが磁石，高周波加速装置などの作用を受けながら高速で運動しているというモデルで設計され運転されてきた．荷電粒子を加速するために空洞内に高周波電磁波を閉じ込めビームにエネルギーを渡すことが加速装置の役目である．空洞の固有モードはビーム（バンチ）が来るたびに加速電場がビームに働くように設計する．しかしながら空洞にはさまざまな固有モードが存在し，それらはビームによって誘起され周波数によっては蓄積し，バンチ間の運動に結合を引き起こしたり，バンチを変形させたりする．このような現象の理解を目的として不安定性の研究が発展してきた．初期の加速器はバンチ数も少ないため，バンチ結合型不安定性に対してはQ値の大きな空洞の固有モードが，単バンチ不安定性には大きな段差からのR/Qがそれぞれの原因として知られていた．ビームはシンクロトロン放射光や残存ガスのイオン化，ビーム粒子のロスにより，電子やイオンなどの異種粒子を作るが，バンチ間隔が広いため次のバンチがくるまでに作られた異種粒子は消えてしまい，バンチ間結合も起こさないし，1バンチで作られる数は少ないので単バンチ不安定性も起こさなかった．

近年の加速器の高強度化に伴い，ビーム電流はmAからAへと増加，電子陽電子リングではバンチ数を増やし，陽子リングでは長いバンチに多くの陽子をつめ高強度化が行われている．このような加速器ではビームが作る異種粒子，とりわけビームと電荷が反対の粒子はビームに引き寄せられ蓄積し，ビームを取り巻く雲を形成する．その雲とビームがコヒーレント運動をすることで不安定性が起こる．異種粒子は非相対論的で，ビームとの相互作用の間ビーム進行方向には動かないと考える．ビームへの影響はビームのある進行方向位置部分（z_1）と異種粒子が相互作用し，異種粒子が受けた摂動をビームの別の進行方向部分（z_2）に伝える．

加速器におけるプラズマ型不安定性は陽子リングにおいて，BINP–PSR，CERN–ISRなどで観測されていた不安定性の解釈として考えられた[1)]．陽子ビームは電子ビームに比べバンチ長が長く，場合によってはリング1周にわたってビーム粒子が詰まった状態で運転されている（コースティングビームという）．e-p不安定性といわれている現象はイオン化によってできた電子が陽子ビームに捕獲され，ビームが横方向に振動し不安定になるというものである．周期条件でベータトロン振動しているビームに対する，2流体不安定性である．

プラズマ物理の2流体不安定性は相対速度の異なる2種類のビームが互いの固有振動で不安定を起こすものである．ちなみに相対速度が同じビームは振動モードは存在するが，不安定を起こさない．このこと

* 高エネルギー加速器研究機構

は静止した異荷電の2粒子を想像すれば容易に理解できる．加速器の場合はビームが高(光)速で運動し，異粒子は静止系である．ビームが周期条件を満たすベータトロン振動をしているため，静止系での振動（$m\omega_0+\omega_\beta$）とビームポテンシャルの中での異粒子の振動数（ω_{ex}）との共鳴と考えられる．異粒子によりベータトロン振動は多少変更を受けるがそのチューンシフトは0.1以下で，それ自体は大きくはない．

80年代以降，それまで少数バンチで運転されていた高エネルギー用電子（衝突）加速器から，放射光用電子加速器用が派生し，放射光高輝度化をめざし多バンチ運転に移行していった過程で，残留ガスから生成されたイオンが捕獲され，e-p同様にして不安定が起こることが観測された．この現象はイオントラッピングといわれ長年研究されてきた．

その後90年代に入り計算機の発達に伴い，ラティス設計，ダイナミックアパーチャなどの問題に始まり，真空パイプのインピーダンス問題，ビームビーム効果などに数値的解析が使われるようになった．そしてこれらの不安定性がシミュレーションで取り扱われるようになった．イオン不安定性をシミュレーションではじめて扱ったのは，いわゆるファーストイオン不安定性と呼ばれる，シングルパスでのイオン不安定性の問題である．物理的には従来のイオン不安定性と同じくビームとイオン振動の共鳴であるが，それまでの制限された条件から，実際の条件にあわせた解析が行われるようになった．

そのころ日米でBファクトリィ計画が提案され，蓄積電流がAという当時は信じられない電子，陽電子リング加速器が設計され，建設されようとしていた．また当時PFはイオン不安定性を避けるため陽電子運転が開始された．陽電子運転の最初は未知のバンチ結合型不安定性に悩まされが，8極磁石の効果で不安定性を抑えつつ運転され，500 mA以上の電流の蓄積に成功していた．そしてBファクトリィに向けて，PFで観測されていた不安定性の理解という動機もあって，陽電子リングの電子雲効果が発見された．

電子はイオンに比べきわめて軽いため，バンチ化されたビームではビーム振動と共鳴する振動数を持つことはできない．不安定を起こす電子の運動が，ビームに対してほとんどシングルパスであり，電子はビームと一度強く相互作用するだけである．そのため解析的な手法はなじまず，計算機による解析が最初から行われた．ある意味で2流体不安定性の進展，展開は，その解析手法の進展とともに進んでいる．KEKBの運転の進展とともにバンチ結合型不安定性だけでなく，単バンチ不安定性も発見され，その抑制によりKEKBのルミノシティは飛躍的に伸びた．

いまや電子雲効果の研究はJ–PARC, SNS, LHCのような高強度陽子加速器，superB, ILCダンピングリングなどの設計にも深くかかわってきている．以下で加速器における2流体不安定性の概要を述べ，e-p，イオン，電子雲不安定性について順次展開していく．

2.　加速器における2流体不安定性

2流体不安定性は，相対速度の異なる2種類のプラズマは安定に存在できない，プラズマは集団的な相対速度が等しい状態が安定である，という物理的事実からくる．加速器の場合は磁場による強い束縛，ベータトロン振動，があるため，ちょっとした違いはあるが，物理的本質において違いがあるわけではない．

まず一様にチェンバーの中心を流れるビームを考える．その周辺に反対の電荷を持った粒子の雲があるとする．ビームの運動はその横方向（進行方向に垂直な面）の重心位置$y(s,t)$で記述される．ここでsは進行方向座標，tは時間である．yは垂直方向を意味するが，xでもよい．電子などの場合横長のビームの場合垂直方向が問題になることが多いのでyで代表して話を進める．加速器では運動する粒子に乗った変数を使うことも多い．基準粒子に対する時間遅れに光速を掛けた量，$z=s-ct$とsを使い，$y(z,\mathrm{s})$で記述する．s,t,zの内の2つが独立変数であるが，一方を座標変数，他方を時間的変数（運動のパラメータ）にとる．どちらを使っても同じことであるが，どちらを使うのが簡単かは問題による．今の問題は進行方向に一様なビームの進行方向位置sでのy方向の位置を時間の関数として調べる．流体力学には流体の運動を絶対位置，時間で記述する考え方と，流体に沿って運動を記述する考え方があるが[*1]，ここでは前述の方法をとる．異種粒子が静止系にあり，ビームもリングにわたって一様にあるので，そのほうが相互作用を素直に表すことができる．ベータトロン振動はビーム粒子に乗った（ラグランジュ）的な表現になっている．ビーム粒子に乗った的微分と静止系で見た微分は以下の関係にある．

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial s} \tag{1}$$

異種粒子がビーム近傍にあり，それがガウス分布をしコヒーレントにビームと相互作用するとすると，その

[*1] 前述をオイラー的，後述をラグランジュ的という

相互作用は2次元のクーロン力と考えれば（異種粒子は非相対論的），運動方程式は以下のようになる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,t)+\omega_\beta^2 y_b(s,t) = -\frac{2n_c r_b c^2}{\gamma}F(y_b(s,t)-y_c(s,t)) \tag{2}$$

$$\frac{d^2 y_c(s,t)}{dt^2}=-2n_b r_c c^2 F(y_c(s,t)-y_b(s,t)) \tag{3}$$

ここでn_b, n_cはそれぞれビーム，粒子雲の線密度であり，r_b, r_cはそれぞれの粒子の古典半径である（$r_{b(c)}=1/4\pi\varepsilon_0 e^2/m_{b(c)}c^2$）．プラズマ物理との違いは加速器中のビームはベータトロン振動をしていることであることによりω_βを含む項があり，それは相互作用項に比べはるかに強い，というかそれが加速器というものである．

式(2, 3)のFは非線形力になるが，ビーム近傍では以下のような線形力が支配的である．

$$F_y=\frac{y}{\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \tag{4}$$

ここで$\sigma_{x(y)}=\sqrt{\sigma^2_{x(y),b}+\sigma^2_{x(y),c}}$である．一方遠方では$F_y=y/r^2$で減少する．$\sigma_b$はビームサイズ，$\sigma_c$は粒子雲のサイズであるが，粒子雲の場合ビームサイズより大きな場合もあるので，ここではビームとのコヒーレント振動に対して，集団的に運動する実効的サイズといったほうがいいだろう．具体的にどのくらいのサイズかというと，雲のサイズが大きい場合，数値的に調べないとわからない．粒子雲がビームサイズ程度なら多分問題なく，そのサイズを入れて間違いない．

異粒子は，磁場がかかっている場合も考慮しなければならないが，ここではビームからの作用のみを考える．このように方程式ができてしまえば，簡単な2つの線形微分方程式なので解は直ちに求められる．

ここで$y(s,t)=\exp(iks-i\omega t)\tilde{y}$とする．$k$は一様ビームの$s$に対する振動パターンを表す．もちろんどんな振動パターンも異なる（ω, k）の足し合わせで表されるので，ある（ω, k）だけ考えれば十分である．リングの場合は周期的境界条件のため，$k=2\pi m/L$でなければならない．ここでLはリングの周長，mは整数で，時間をとめてみたときの1周の振動パターンの節の数である．当然ながら線形加速器の場合はkに制限はない．

この式をフーリエ変換して周波数に対する分散式を表すと，

$$[(\omega-kc)^2-\omega_\beta^2]\tilde{y}_b=\omega_b^2(\tilde{y}_b-\tilde{y}_c) \tag{5}$$

$$\omega^2\tilde{y}_c=\omega_c^2(\tilde{y}_c-\tilde{y}_b) \tag{6}$$

ここで

$$\omega_b^2=\frac{2n_c r_b c^2}{\gamma\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \tag{7}$$

$$\omega_c^2=\frac{2n_b r_c c^2}{\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \tag{8}$$

y_c, y_bを消去することにより，以下の分散式が得られる．

$$(\omega^2-\omega_c^2)[(\omega-kc)^2-\omega_\beta^2-\omega_b^2]=\omega_b^2\omega_c^2. \tag{9}$$

このωに対する4次方程式を解けば，あるkを持ったビーム，粒子雲の振動パターンがどのように成長していくかがわかる．

以下でリングの場合と，線形加速器の場合を論じるが，リングの場合とはビームが一様に回っている状態で周期的境界条件がなりたつ場合，線形加速器の場合とは周期的境界条件がない場合で，リング内の一部にビームが回っている場合を含む．

リングの場合$kc=m\omega_0$で置き換える，ここでmは整数で，ω_0は周回周波数である．不安定は粒子雲の振動に近いビームの振動モードが誘起されることから起こる，ある意味粒子雲の振動とビームの振動モードの共鳴である．そのため$\omega\approx\omega_c\approx m\omega_0\pm\omega_\beta$で不安定になることが推測される．$\omega=\omega_c+\Delta$, $\omega_c-m\omega_0=\pm\omega_\beta+\Delta_\pm$と置き，式(9)に代入すると，高次を無視すると以下のΔに関する2次方程式が得られる．

$$\Delta^2\pm\Delta_\pm\Delta\mp\frac{\omega_b^2\omega_c}{4\omega_\beta}=0 \tag{10}$$

判別式Dは

$$D=\Delta_\pm^2\pm\frac{\omega_b^2\omega_c}{\omega_\beta} \tag{11}$$

$\omega_c-m\omega_0\approx\omega_\beta$では判別式は常に正で安定である．一方$\omega_c\approx m\omega_0-\omega_\beta$では共鳴条件からのずれが小さくなったとき，$\Delta_-^2<\omega_b^2\omega_c/\omega_\beta$で虚根になり不安定になる．このことはストップバンドが存在するということである．

線形加速器の場合はkに条件がつかない．$\omega_\beta-kc=-\omega_c$をもった波数$k$の振動は虚数部が現れる．

$$\Delta_\pm^2=\pm\frac{\omega_b^2\omega_c}{4\omega_\beta} \tag{12}$$

つまり必ず不安定性である．このことは特に線形加速器が 2 流体不安定性が問題であるということを言っているわけではない．線形加速器に対して，不安定性はすべてそうなっているし，それを抑える効果も知られている．

加速器の不安定性は一般に航跡力（wake force）を使って論じられる．ここでは式(2), (3)からスタートして，その不安定性理論に沿うような変形を行ってみる．まず式(3)は定数変化法などを用いて以下のように解くことができる．ここで $t=t_0$ で $y_c=0$ とした．

$$y_c=\omega_c\int_{t_0}^{t} y_b(s,\,t')\sin\omega_c(t-t')\,dt' \tag{13}$$

この式を(2)に代入すれば運動方程式は以下のようになる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_s\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,\,t)+\tilde{\omega}_\beta^2 y_b(s,\,t)=\omega_b^2\omega_c\int_{t_0}^{t} y_b(s,\,z')\sin\omega_c(t-t')\,dt' \tag{14}$$

ここで $\tilde{\omega}_\beta^2=\omega_\beta^2+\omega_b^2$ は粒子雲との相互作用を考慮したビームのベータトロン角周波数である．チューンシフトとしてあらわすと（$\tilde{\omega}_\beta=\omega_\beta+\Delta\omega_\beta$），以下のように書ける．

$$\Delta\omega_\beta=\frac{\omega_b^2}{2\omega_\beta} \tag{15}$$

ここで ω_0 は周回角周波数である．式(14)の右辺は加速器の不安定性理論でお馴染みの航跡力(wake force)としてみなすことができる．wake force は 2 点の進行方向の位置の差の関数である．ある単位時間 $T_0=L_0/c$ あたりの wake function は以下のようになる．

$$W_1(z)=cR_S/Q\sin\omega_c t \tag{16}$$

ここで wake function の振幅である R_S/Q は以下のようになる．

$$cR_S/Q=\frac{\gamma\omega_b^2\omega_c}{n_b r_c c^2}T_0 \tag{17}$$

結局運動方程式は wake function W を使って以下のように書かれる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_s\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,\,t)+\tilde{\omega}_\beta^2 y_b(s,\,t)=\frac{n_b r_c c^2}{\gamma T_0}\int_{t_0}^{t} W(t-t')y_b(s,\,t')\,dt' \tag{18}$$

この wake function は従来の言い方で $Q=\infty$ の共鳴型インピーダンスによるものである．

この wake function に対応するインピーダンスは以下のように定義される．

$$Z_\perp(\omega)=i\int_{-\infty}^{\infty} W(t)\exp(-i\omega t)\,dt \tag{19}$$

この場合よく知られているように以下のようになる．

$$\begin{aligned}\mathscr{R}Z_\perp&=\frac{\pi cR_S}{2Q}\left[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)\right]\\ \mathscr{T}Z_\perp&=\frac{cR_S\omega_c}{2Q}\left(\frac{1}{\omega-\omega_c}+\frac{1}{\omega-\omega_c}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

ここで少しくどいようだが，教科書にあるような電磁場による wake function の導入に沿って同じことを繰り返してみよう．基底状態は電磁場の場合，空洞であったが，ここではビーム，粒子雲が s 軸上（$x=y=0$）に一様に存在する場合を基底状態とする．粒子雲は式(3)に従い運動する，すなわち ω_c で振動する．この周波数は空洞の固有周波数と同じ意味を持つ．今ビームのある位置 $z=0$ に y 方向へ小さな変異があるとしよう，$y=y_0$．粒子雲はこの摂動によって，運動を開始する．ダイポールを持ったビームの通過によって，空洞に固有振動が誘起される状態である．粒子雲の受ける運動量変化は

$$\Delta v_y=\omega_c^2\delta_s\Delta y \tag{21}$$

その後の粒子雲の運動は

$$y_c=\frac{v_y}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \tag{22}$$

によって表される．この振動によって，ビームは以下のような力を受ける．

$$\Delta p_y\equiv F_y=\omega_b^2 y_c=\omega_b^2\omega_c\delta_s\Delta y\sin\omega_c(t-t') \tag{23}$$

これから wake function が再び得られる．

$$W=\frac{F}{n_b r_b\Delta y}=\frac{\gamma\omega_b^2\omega_c}{\lambda_b r_c c^3}L\sin\left(\frac{\omega_c}{c}z\right) \tag{24}$$

つぎにリングの場合のこの wake force による不安定性を調べよう．運動方程式(18)をフーリエ変換する．右辺の wake force はフーリエ変換のためインピーダンスで表される．

$$-(\omega-m\omega_0)^2+\omega_\beta^2=\frac{n_b r_b c^2}{\gamma T_0}Z_\perp(\omega) \tag{25}$$

右辺は小さい量なので，$\omega \approx n\omega_0 \pm \omega_\beta$ のときを考えれば十分である．

$$\omega - m\omega_0 \pm \omega_\beta = \pm \frac{n_b r_e c^2}{2\omega_\beta \gamma T_0} iZ_\perp(\omega) \tag{26}$$

本来は上の式を解くのだが，右辺 Z において $\omega = m\omega_0 \pm \omega_\beta$ を代入する．ω の虚数部が不安定性の成長度 $1/\tau$ になる．

$$\frac{1}{\tau} = \mp \frac{n_b r_e c^2}{2\omega_\beta \gamma T_0} i\mathcal{R} Z_\perp(m\omega_0 \pm \omega_\beta) \tag{27}$$

式(20)から，不安定になるのは下側の符号をとった場合，つまり $\omega = m\omega_0 - \omega_\beta$ の場合で，成長度は無限大である．式(11)と定性的に一致しているが，ストップバンドの有無，成長度の大きさの違いは上述の近似からくる．あえて式(25)を解かないのは，Q が有限の場合ストップバンドが広がって実質上なくなるため，この方法でもとめた成長度で実際正しいからである．このことは後でまた触れる．

次に線形加速器，あるいはリング内で一部にビーム粒子が入っている場合について述べる．周期的条件がないので，ビームの振動に対して条件はない．ビームは動いてしまうのでラグランジュ的に考える．電子雲は実験室系で運動するので，wake force はそれぞれの s に存在するので，加速器で一般に使われている時間変数を s にとる．z は先ほども述べたように基準粒子からの時間遅れに光速をかけたもので，実質先頭を $z=0$ としたときの進行方向の位置である（$z<0$）．

$$\frac{d^2 y_b(s,z)}{ds^2} + \left(\frac{\tilde{\omega}_\beta}{c}\right)^2 y_b(s,z) = \frac{\omega_b^2 \omega_c}{c^3} \int_z^\infty y_b(s,z') \sin \frac{\omega_c}{c}(z-z') dz'. \tag{28}$$

$y = \tilde{y} \exp(-i\omega_\beta s/c) \exp(\omega_c z/c)$ という解を考える．$\tilde{y}(s,z)$ は z, s に対してゆっくり変わる成分で，2 回微分を無視すると，

$$\frac{d\tilde{y}}{ds} = \frac{\Lambda}{4} \int_z^\infty \tilde{y}(s,z') dz' \tag{29}$$

ここで

$$\Lambda = \frac{n_c r_b}{\gamma} \frac{1}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \frac{\omega_c}{\omega_\beta} = \frac{\omega_b^2 \beta_c}{2} \omega_\beta \tag{30}$$

さらに z で微分すると以下のような偏微分方程式が得られる．

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial s} = \frac{\Lambda}{4} \tilde{y}(s,z) \tag{31}$$

この解は方程式の対象性から $F(\Lambda zs/4)$ とすると

$$\xi F'' + F' + F = 0, \quad \xi = \Lambda/4 \tag{32}$$

となり，変形ベッセル関数 $F(\xi) = I_0(2\sqrt{\xi})$ で表せる．結局解は

$$\tilde{y} = I_0(\sqrt{-\Lambda zs}) \approx \exp(\sqrt{-\Lambda zs}) \tag{33}$$

となり，成長は指数関数的でなく平方根が入る．この解はリングでの $Q=\infty$ の場合の解に対応するものである．バンチ長，トレイン長が Q に対し短い場合，$\omega_c \sigma_z / cQ < 1$ の場合には上の式は正しいが，長い場合，$\omega_c \sigma_z / cQ > 1$，には正しくない．

ちなみにバンチ長が短い場合（$\omega_c \sigma_z / c < 1$）では，$Q$ に関係なく，

$$\exp\left[\left(\frac{\Lambda}{2}\sigma_z s\right)^{1/3}\right] \tag{34}$$

のように成長する．

空洞の場合，空洞表面のロスによって固有振動は減衰するため有限の Q になる．粒子雲の場合でも，ビームに誘起された粒子雲の振動が永遠に続くことは考えられない．我々は異種粒子の振動がビームの強い非線形力のなかで起こっていることを知っている．Q がある程度小さく，つまり粒子雲の振動幅がストップバンドより広ければ，それは意味を成さなくなり，wake force を使った方法で正しい結果を示す．大型のリングや低エミッタンス，高強度リングでは周回周波数に比べ大きく，$\omega_c \gg \omega_0$，その幅も大きいのでストップバンドは存在しない．むしろいくつかの不安定モードが現れる．

どのくらいの Q なのかは線形理論では知ることはできないが，あとで数値的な手法からわかるように $Q \approx 5$ 程度である．ここでは現象論的にチューン広がり，減衰振動を導入して，これまでの議論を繰り返す．

式(3)に以下のように減衰項を加える．

$$\frac{d^2 y_c}{dt^2} + \alpha \frac{dy_c}{dt} = 2n_b r_c F(y_c - y_b) \tag{35}$$

この減衰は Q が有限になることに対応する．Q と α の関係は $\alpha = \omega_c/2Q$ によって表される．wake function は

$$W(z) = cR/Q \exp(\alpha z/c) \sin(\omega z/c), \quad z<0 \tag{36}$$

インピーダンスは

$$Z_{\perp}(\omega)=\frac{c}{\omega}\frac{R_S}{1+iQ\left(\frac{\omega_c}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \tag{37}$$

リングの場合の不安定成長度はこのインピーダンスの式(37)を(27)に代入すればよい．その Q に応じていくつかのモードが不安定になる．

線形加速器，リングの一部にビーム粒子がある場合には式(31)は

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial s}\tilde{y}=\alpha\frac{\partial}{\partial s}\alpha+\frac{\Lambda}{4}\tilde{y}(s,z) \tag{38}$$

となる．s が小さいうちは左辺は無視でき右辺だけで決まる，指数関数的成長が見られる．

$$\tilde{y}\propto\exp\left(\Lambda s/4\alpha\right) \tag{39}$$

この成長度は一様ビームの場合と同じである．

ここまでが線形理論で得られる加速器内での2流体不安定性の概要である．wake force による不安定性は知られているし，知っている方にはここまでわかればずいぶん見通しがついたことと思う．以降はこの考えを基礎に個々の場合，すなわち e-p，イオン（トラッピング，ファースト），電子雲（バンチ結合型，単バンチ型）についてそれぞれの特徴を述べつつ，説明していく．

3.　e-p 不安定性

陽子ビームと電子雲の2流体不安定性は，いくつかの陽子蓄積リングで観測され，e-p 不安定性といわれてきた．陽子ビームは一様ないし非常に長い $\omega_c\sigma_z/c\gg 1$ 場合を想定している．物理的モデルは後で述べる陽電子リングにおける単バンチ電子雲不安定性と同じである．

リングの場合 Q によってストップバンドがなくなると基本的にビームは不安定になる．しかしながらビームを安定化させるメカニズムがある．それはランダウ減衰である．ビーム粒子が s 方向にエネルギーの違いにより速度が異なる．超相対論的ビームの場合でも速度は c で一定だが，運動量コンパクションがあるため，周回周波数はエネルギーによる．

$$\Delta T/T_0=\eta\delta,\quad \eta=\alpha-\frac{1}{\gamma^2} \tag{40}$$

2流体不安定性はビームの横波の成長なので，エネルギーによって進行方向進度がばらばらになると，横波のコヒーレンスが失われてしまう．そのため横波は減衰するし，育つこともできなくなってしまう．このような減衰過程をランダウ減衰という．

ランダウ減衰は人にもよるが，不安定性で起こる振動の成長を抑える効果のことを言うようである．ある振幅のコヒーレント振動が位相が混じることでコヒーレント振幅が減衰していくいわゆるデコヒーレンスと区別する人もいる．

エネルギー $\delta=\Delta E/E_0$ を持ったビーム粒子に対する wake force は，そのビーム粒子より過去に通過したすべてのビーム粒子の分布に応じて発生する．つまりビーム粒子のエネルギーに対する分布を $f(\delta)$ で表すとすると，wake force は δ を持ったビーム粒子（の重心）と，エネルギーに対する分布関数（$f(\delta)$）の積の積分にたいして wake function W の積をとり，時間に対して積分する．ビーム粒子の（重心の）運動は以下で表される．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{2\pi m v_s(\delta)}{L(\delta)}\right)^2 y_b(s,t,\delta)+\omega_\beta^2 y_b(s,t,\delta)\\&\quad=\frac{n_c r_b c^2}{\gamma T_0}\int_{-\infty}^{t}dt'\,W(t-t')\\&\quad\quad\times\int_{-\infty}^{\infty}y_b(s,t',\delta')f(\delta')d\delta'\end{aligned} \tag{41}$$

ここで，$L(\delta)$ はエネルギーのずれ（δ）を持ったビーム粒子のリング1周の軌道長，$L(\delta)=L_0(1+\alpha\delta)$，$v(\delta)$ はエネルギーのずれ（δ）を持ったビーム粒子の速度，$v_s(\delta)=v_s(1+\delta/\gamma^2)$ で表される．2項目は係数は以下のようになる．

$$\frac{v(\delta)}{L(\delta)}=\omega_0(1-\eta\delta) \tag{42}$$

フーリエ変換することにより

$$\begin{aligned}&[-\{\omega-m\omega_0(1-\eta\delta)\}^2+\omega_\beta^2]y_b(s,\omega,\delta)\\&\quad=\frac{n_c r_b c^2}{\gamma T_0}Z(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}y_b(s,\omega,\delta')\rho(\delta')d\delta'\end{aligned} \tag{43}$$

左辺の係数を右辺の分母に移行し，両辺を $\rho(\delta)$ を掛け δ で積分し，両辺を $\int y_b\rho d\delta$ で割れば，よく知られた分散式が得られる．

$$\begin{aligned}1=&\pm i\frac{n_c r_b c^2}{2\omega_\beta\gamma T_0}Z(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\\&\times\frac{f(\delta)}{\omega-m\omega_0(1-\eta\delta)\pm\omega_\beta}d\delta\end{aligned} \tag{44}$$

この分散式の ω の虚数部の有無によって，安定性を

表1　いくつかの陽子円形加速器における電子雲不安定性に対する電子密度閾値

variable	symbol	JPARC–RCS	JPARC–MR	KEK–PS	PSR	ISIS
circumference	L (m)	348.3	1567.5	339	90	163
relativistic factor	γ	1.43/4.2	4.2/54.	12.8	1.85	1.07
beam line density	n_p ($\times 10^{10}$) m^{-1}	37.7/50.6	50.6/259	0.74	46.2	20.8
rms beam sizes	σ_r (cm)	1.9/1.2	1.1/0.35	0.5	1.0	3.8
rms momentum spread	σ_E/E (%)	0.6/0.7	0.7/0.25	0.3	0.4	0.5
transition energy	γ_t	9.14	31.6i	6.76	3.08	5.07
electron frequency	$\omega_e L/c$	422/775	27080	225	229	73.6
threshold	$n_{e,th}/n_p$ (%)	28.2/3.0	3.1/0.042	4.0	2.1	42.

知ることができる．ビーム粒子のエネルギー分布に応じて安定性の条件が決まる．大雑把に安定性を知るには，積分が簡単に実行できる分布を選んでしまうことである．エネルギーに対してどの程度分布が広がっているかが減衰の本質なので，分布形状による多少の違いは無視してしまう．ローレンツ分布と仮定すれば，複素積分によって容易に積分を実行できる．その半値幅 Δ_δ を使って，分布を以下のように与える．

$$f(\delta)=\frac{1}{\pi}\frac{\Delta_\delta}{\delta^2+\Delta_\delta^2} \tag{45}$$

積分を実行し

$$\omega=m\omega_0\mp\omega_\beta-im\omega_0\eta\Delta_\delta\pm i\frac{n_b r_b c^2}{2\omega_\beta\gamma T_0}Z(\omega) \tag{46}$$

$\mathscr{T}\omega<0$ であるために

$$\frac{\mathrm{n_b r_b c^2}}{4\pi\gamma m\eta\Delta_\delta\omega_\beta}Z(\omega_c)<1 \tag{47}$$

電子雲の線密度で表すと，以下のようになる．

$$n_{e,th}=\frac{2\pi\sigma_x\sigma_y\gamma m\omega_\beta\eta\Delta_\delta}{Qr_e cL} \tag{48}$$

一様ビームでなく，バンチの場合でも $\omega_c\sigma_z/cQ>1$ ならば，不安定成長度は一様ビームと同じで，ランダウ減衰も同じため，安定化条件も同じく式(47)，(48)で表される．

表1にいくつかの陽子加速器に対して，電子雲の密度，ビーム線密度との比（中性度）を示す[*2]．

不安定の観測がされているLANL–PSRでは2.1%に対し，観測されていないRutherford–ISISでは42%と不安定性を起こしにくいことがわかる．JPARCはPSRより電子密度の閾値が低い場合もある．実際に電子密度がどのくらいかを評価する必要がある．このためには5.1節にあるシミュレーションを行うのだが，詳細は次号にまわすことにする．

連続ビームではイオン化などビーム近傍で作られた電子が，ビームポテンシャルにより安定に運動し，徐々に密度は増えていくため最終的には不安定を起こす密度に達する．しかしながらビームが振動を始める，微小振動であっても電子はビーム振動と共鳴しているため，大振幅になり，拡散してしまう．そのため不安定性の強さは生成率が低ければ問題にならない．このことは線形理論では表現できず，数値シミュレーションで示される[2)]．この点から**表1**の中性度がどの程度意味ある量か，難しい問題である．それが低いことがとくにイオン化で電子がゆっくり蓄積されるような場合，直ちに深刻であることを意味しない．

4.　イオン不安定性

電子ビームにより陽イオンが作られ，ビームとの2流体不安定性がイオン不安定性である．電子ビームの残留ガスCOのイオン化断面積は，数GeVのビームに対して $\sigma_{ion}=2\times10-22\ \mathrm{m}^2$ であり，真空度 10^{-7} Paでは，電子1個が1 m進むとイオンの生成率は $4.5\times10^{-9}\ \mathrm{m}^{-1}$ である．

電子ビームは一般的にはバンチ長～1 cmで，RF波長ないしその数倍の間隔（L_{sp}）でリング全体あるいはイオンをクリアする目的でギャップを設けている．RF周波数は日本では500 MHz周辺が多用されている．波長は60 cmである．イオンはビームのポテンシャルで運動するが，イオンの振動周波数がバンチ列の周波数 c/L_{sp} に比べ十分長ければ，バンチ列であるビームを連続的に近似できる．バンチ列を一様としたときのイオンの周波数は以下のようにかける．

[*2] JPARC–RCS，180 MeV入射の場合は400 MeVに比べやさしいので400 eVで評価

$$\omega_i^2=\frac{2N_e r_p}{ML_{sp}}\frac{1}{\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \tag{49}$$

ここで N_e はバンチあたりの電子数である．代表的な値 $N_e=1\times10^{10}$, $L_{sp}=1$ m, $\sigma_x=1$ mm, $\sigma_y=0.1$ mm を代入すると，$\omega_i/2\pi=5\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_i L_{sp}/c=0.1$ となる．この値はイオンは10バンチの通過に対して1 rad の振動をすることを意味し，バンチ列は一様なビームと考えてよい．

イオンの受けるキックとバンチ間のドリフト時間からイオンの捕獲条件が計算できる．

$$K_i=\frac{2N_e r_p}{M}\frac{1}{\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \tag{50}$$

バンチ間隔の間のイオンのドリフト（L_{sp}/c）による転送行列から以下の捕獲条件が得られる．

$$K_i L_{sp}/c=(\omega_i L_{sp}/c)^2<4 \tag{51}$$

この条件は上述の条件と事実上同じものである．

バンチ列を連続ビームと考えることにより，2節で述べたことがそのまま適用できる．すなわち wake force は式(16), (20), (36), (37)により，不安定性の成長率はその wake force を使い式(27)により与えられる．いくつかの加速器における不安定成長度とイオン密度の関係を**表2**に示す．ここで成長度は中性度（n_i/n_e），Q で規格化されている．

$$\frac{T_0}{\tau}/fQ=\frac{n_e r_e \beta L}{\gamma\sigma_x\sigma_y} \tag{52}$$

またここでも ep 不安定性と同じく，イオンが徐々に蓄積して，不安定がいくらでも強くなるという可能性を考えられるが，小さいビーム振動でイオンが拡散してしまうため，制限なくイオンがたまるわけではない．しかし一般的にリングでギャップを入れないで一様ビームで運転すると，不安定になりがちであることは事実である．

ここで注意したいのは不安定性の成長が最近の高強度低エミッタンス加速器ではかなり強いということである．電子生成率 4.5×10^{-9} から KEKB などでは1ターン（3016 m）で作られるイオンで中性度は 1.4×10^{-5} で，成長率は

$$\frac{T_0}{\tau}=6760\times1.4\times10^{-5}\times5=0.47 \tag{53}$$

とすでに不安定成長時間2ターンとなってしまっている．このことは不安定性が起こるために多くのターン数のイオンの蓄積は必要なく，シングルパスで十分不安定になることを意味する．これがいわゆるファーストイオン不安定性と呼ばれるものである．線形加速器の場合の2流体不安定性の式(29), (29), (31)とほぼ同じであるが，違いはイオン数が $|z|$ が増えるにしたがって（後方）増えていくことである，$n_i=n_i'|z|$．関連した係数

$$\Lambda=\Lambda'|z|=(\omega_b^2)'\frac{\omega_i}{\omega_\beta}|z| \tag{54}$$

それに伴って，式(31), (38)は以下のようになる．

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial s}\tilde{y}=\alpha\frac{\partial}{\partial s}\alpha+\frac{\Lambda'}{4}z\tilde{y}(s,z) \tag{55}$$

解は $\alpha=0$（$Q=\infty$）の場合

$$\tilde{y}=I_0(-z\sqrt{\Lambda' s})\approx\exp(-z\sqrt{\Lambda' s}) \tag{56}$$

となる．$\alpha>0$, finite Q の場合，s が小さいうちは

$$\tilde{y}\propto\exp(\Lambda' zs/4\alpha) \tag{57}$$

この成長度は $\Lambda' z=\Lambda$ としたときの一様ビーム（イオン捕獲）の場合と同じである．

表3にいくつかのリングにおける不安定成長度を示す．

バンチ化されたビームは z 方向に運動することはないため，e-p 不安定性の時のようなシンクロトロン振動によるランダウ減衰は期待できない．放射減衰より早い不安定性はフィードバックか横方向のチューン広

表2　いくつかの電子蓄積リングにおけるイオン密度と，不安定性成長の関係．$\sigma_y=0.1\sigma_x$ を仮定している．

variable	symbol	KEK–PF	KEKB	SPring–8	PLS
circumference	L (m)	186	3016	1436	280
energy	E (GeV)	2.5	8.0	8.0	2.5
beam line density	n_e ($\times10^{10}$) m^{-1}	1.2	3.0	0.25	0.46
beam sizes	σ_x (mm)	0.5	0.5	0.2	0.4
growth rate	T_0/τ	516	6760	2150	395

表 3　いくつかの電子蓄積リングにおけるファストイオン不安定性の成長度（$\sigma_y = 0.1\sigma_x$，真空度10^{-7} Pa を仮定）

variable	symbol	KEK–PF	KEKB	super KEKB	SPring-8	PLS	ILC–DR
circumference	L (m)	186	3016	3016	1436	280	6477
energy	E (GeV)	2.5	8.0	3.5	8.0	2.5	5.0
beam line density	n_e ($\times 10^{10}$) m^{-1}	1.2	3.0	22	0.25	0.46	1.1
bunch train length	L_{tr} (m)	150	2800	2800	800	240	41.4
beam sizes	σ_x (mm)	0.5	0.5	0.5	0.2	0.4	0.13
vacuum pressure	P (nTorr)	1	1	1	1	1	0.2
growth time	τ(ms/turn)	0.70/1125	0.21/20.9	0.007/0.74	0.18/38	0.96/1030	0.08/3.8

がりを利用したランダウ減衰，あるいはクロマティシティと通常のインピーダンスによるヘッドテイル減衰に頼らざるを得ない．

次に電子ビームのなかでのイオンの振動について調べる．

$$\omega_i'^2 = \frac{N_e r_p}{M\sigma_z} \frac{1}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} c^2 \tag{58}$$

先ほどの定型的なパラメータに加え $\sigma_z = 1$ cm とすると，$\omega_i'/2\pi = 3.5\times 10^7$ s^{-1}, $\omega_i'\sigma_z/c = 0.007$ であり，イオンはバンチ内の振動に対して，位相はほとんど変化しない．ビームの不安定性はイオンの振動によって起こるので，バンチ内での振動がないということは，イオンはバンチ内の振動に影響しない，つまりこのパラメータ領域では単バンチ不安定性は起こりにくいということができる．

5.　電子雲不安定性

電子はイオンに比べはるかに軽いため，ビームによる振動も速くなる．振動数は $m_c^{-1/2}$ に比例するので，240 倍である．イオンのときと同様代表的な値 $N_p = 1\times 10^{10}$, $L_{sp} = 1$ m, $\sigma_x = 1$ mm, $\sigma_y = 0.1$ mm を入れると $\omega_e/2\pi = 1.1\times 10^9$, $\omega_i L_{sp}/c = 24$ となり，電子にとってバンチ列を一様なビームと見ることはできない．電子がイオンのようにビームポテンシャルの中で振動したり，トラップされることはない．そのためバンチ間の結合型不安定性に対して，直ちに 2 節の手法は適応できないし，それ自身が起こりうるかという問題にもなる．しかしこれは単一電子の周波数なので，集団的な周波数は異なる可能性もある．結果的にはバンチ結合型不安定性として起こりえることを以下で述べる．

一方，バンチは短くはあるが，2 節のリングの一部にビームが蓄積された場合に当てはめると，$\sigma_z = 1$ cm として，$\omega_e/2\pi = 8\times 10^9$ s^{-1}, $\omega_e\sigma_z/c = 1.7$ となる．バンチ内での振動は不安定を起こす可能性があり，2 節の方法で扱うことができる．以下で単バンチ不安定性として論じる．

5.1　電子雲の蓄積

電子はイオンと違ってチェンバーの壁から光電効果によって作られる．その量は圧倒的に多い．そのためビームから遠い電子も多い一方，その数の圧倒的に多いことでビームに影響する．まず放射光の放出は以下の式で表される．

$$N_\gamma = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \alpha\gamma \tag{59}$$

挿入光源を無視すると，PF では陽電子 1 個あたり 1 周 320 個，KEKB では 450 個生成される．メートルあたりで 1.7/m，0.15/m となる．光子が真空チェンバーにあたると，0.1 個（つまり 10 個に 1 個）電子が放出される．そのエネルギーは非常に低く数 eV である．つまり電子の生成率は KEK–PF で $Y_1 = 0.17$ $e^-/m\cdot e+$，KEKB で $Y_1 = 0.015$ $e^-/m\cdot e+$ となる．この値はイオン化生成率 $Y_i = 5\times 10^{-9}$ $e^-(CO)/m\cdot e^-$ に比べ，圧倒的（7 桁）である[*3]．

次に電子がどのくらいチェンバーに蓄積されるか考える．簡単には電子がチェンバーにどのくらい留まっているかわかれば，蓄積量はわかる．電子の平均エネルギーは平均陽電子電流によるポテンシャル

$$V = \frac{n_p e}{2\pi\varepsilon_0} \int_{\sigma_x}^{R} \frac{1}{r} \tag{60}$$

から，KEKB の場合 500 V である．電子の初期エネルギーは小さいので，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの等分配を仮定すると，電子の平均エネルギーは 250 eV，平均速度は 10^7 m/s で $2R$ を走るの

[*3] ただし $\pi r^2/\sigma_x\sigma_y = 3\times 10^5$ なので密度という観点に立てば電子，イオンの滞在時間の問題もあるので面白い関係になる．

に 10 ns となる．

蓄積される電子は 2 A の陽電子ビームでは，$n_e = Y_1 n_p c \times 10\ \mathrm{ns} = 2\times 10^9\ \mathrm{m}^{-1}$ となる．中性度は $\lambda_e/\lambda_p = 5\%$ である．一様分布とすると $\rho_e = n_e/\pi R^2 = 2.5\times 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$ である．大局的に見ればこの議論はまったく的外れではないが，実際は熱平衡ではないため正確ではない．そのため数値シミュレーションによって電子の量，分布を求めるのが一般的である．電子蓄積を調べるシミュレーションは，電子が作られる描像をそのままプログラム化すればよい．つまりチェンバーを考えビームが通るたびに $Y_1\times N_p$ の電子を発生させ，ビームで内側に引っ張り，次のバンチが来たらまた電子を発生させ，これを繰り返すことでチェンバー内に電子をためていくのである．計算機上では $Y_1\times N_p$ ではなく，少ない数のマクロ粒子を使うのは言うまでもない．磁場を入れたり，電子がチェンバーに戻ったときに 2 次電子を作ったりいろいろバリエーションはありうるが，とくに原理的に難しい点はない．**図 1** に KEKB での電子雲の蓄積状態を示す．

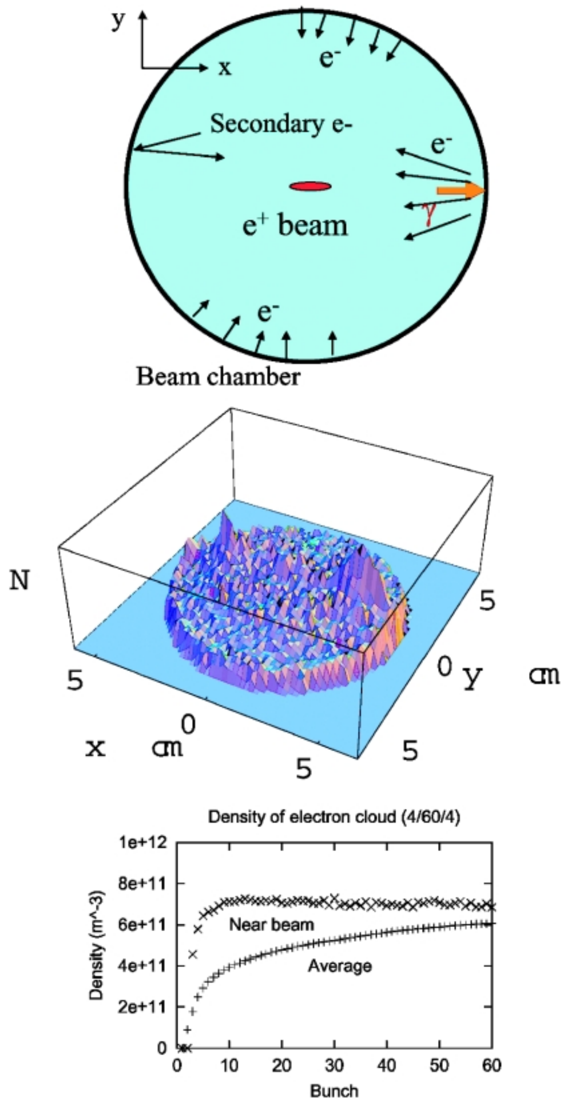

図 1　電子雲形成モデルと電子雲密度

5.2　バンチ結合不安定性

この節の最初に述べたように，電子の振動は $\omega_i L_{sp}/c > 1$ であるため，バンチ間の時間でビームから離れてしまい，線形領域でビームに捕獲されない．しかしながらこの議論はあくまでもビーム近傍のことである．電子はチェンバー全体に広がっていて，全体量は膨大である．電子が線形領域から非線形領域に出て行ったとしても直ちにチェンバーに吸収されるわけではない．バンチ間隔が狭ければ，前のバンチの運動の痕跡が何らかの形で後方に伝わったとしても何の不思議もない．このバンチ間の相関がバンチ結合型不安定性の原因となる．

この不安定性が KEK–PF で観測され，それが電子雲効果研究の始まりとなった．このバンチ間の相関，結合を解析的に扱うのは難しい．先に数値的方法を述べ，解析的に解釈するほうが手っ取り早い．

数値的方法は式(23)を求めた手法を計算機上で行う．5.1 節で行ったように，バンチ列を並べ，チェンバーを通過するたびに電子を発生させ，電子雲を形成させる．電子雲が平衡に達したらバンチ列のうちの一つをずらして，その後のバンチの受ける力を計算するのである．これが wake force である．もちろんずらしたバンチもその後のバンチも電子を作り続けるつつ，wake force を計算する．

wake force が求まればあとは公式(27)に入れれば不安定性の成長度を計算できる．**図 2** に数値的に求めた KEKB での wake force（上図）と，不安定成長度（下図）を示す．上図の縦軸は電子雲のうける速度変化で適当な係数を掛ければ wake function が得られる．ビームのずれ 1 mm，2 mm に対して速度変化が計算されている．ずれが 2 倍になると速度変化も 2 倍になっているので，wake force の線形性は成り立っている．下図はその wake function から求めたモード番号（m）ごとの不安定成長度（単位 s^{-1}）である．位置電極モニターなどで測定すると $m\omega_0 + \omega_\beta$ の周波数が観測される．この計算は KEKB デザイン時のものでバンチはすべてのバケット 2ns ごとに（H＝）5120 入れられている．PF, KEKB で観測されているように非常に早い不安定成長を示す．

電子雲のバンチ結合不安定性にはこれまでとちょっと違ったことが入ってくる．それは磁場である．蓄積される電子の量は影響を受けても不安定性の性質自体

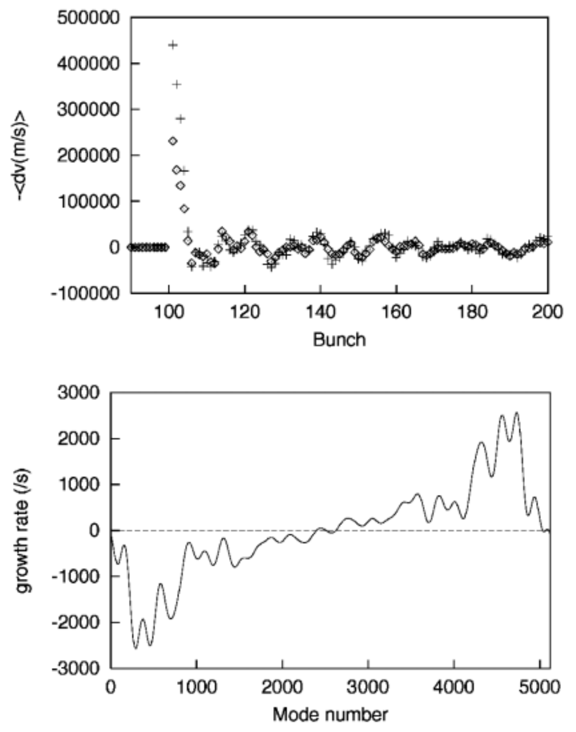

図 2　電子雲による wake force（上図）と不安定モードとその成長度（下図）

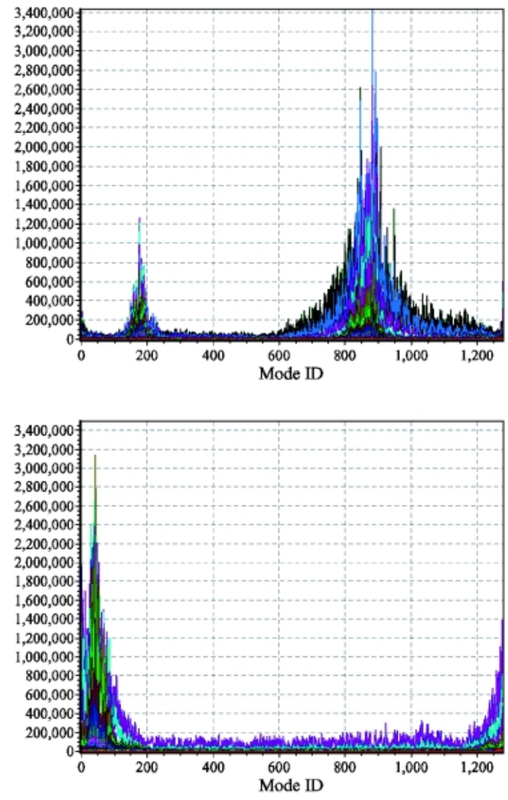

図 3　測定されたソレノイド磁石のオン（上図），オフ（下図）による不安定モードの変化[9)]

には磁場があっても大きな変化はなかった．電子はビームと相互作用してから，環境の磁場状態に応じて運動する．次のバンチが受ける効果はその間の運動状態を反映する．それによって結合モードの現れ方がまったく違うことが考えられる．実際 KEKB ではリングに巻いたソレノイド磁石を ON/OFF してバンチ結合モードを測定したがきれいにその特徴を表すモードが得られた．**図 3** にソレノイド磁石あり（下図），なし(上図)それぞれの測定された不安定モードを示す．この図はバンチ振動フィードバックを切った際，ビームダンプする直前のビーム位置モニターの信号を FFT にかけたものである．横軸はモード番号（m）で $m\omega_0+\omega_\beta$ の角周波数のビーム振動に対応する．バンチは 8 ns ごとに入れられていて，横軸のフルスケールは H/4＝1280 である．数値シミュレーションでもこれとまったく同じ不安定モードが計算できる[8)]．これは電子雲効果であることのもっとも明確な証拠のひとつである．

このバンチ結合型不安定性に対して解析的説明を試みる．まず電子の集団運動がビームによって誘起されたとしても，非常に速く減衰すると思われる，すなわち低 Q の共鳴型インピーダンスとしてとして考える．数値的方法と矛盾のない結果は $\sigma_{x,e}\times\sigma_{y,e}=1\ \mathrm{cm}^2$ の電子雲とビームの集団運動と考えればよいことがわかる．これを式(17, 37, 27)で成長モードと成長度を計算すると，おおむね一致する．それからどのような物理状態か，ある程度はイメージできるであろう．

5.3　単バンチ不安定性

単バンチ不安定性は物理的にはすでに述べた e-p，イオンの 2 流体不安定性と同様に議論できる．3，4 節では電子やイオンの分布がビームと同じ大きさであると想定していた．今の場合，電子はチェンバー内に広く分布している．そのためどのくらいの電子が不安定性に効いてくるかが問題になる．チェンバーの大きさの電子雲がバンチ内のポテンシャルでコヒーレントに運動するのか，あるいはビーム近傍の電子だけが運動するのか，それによって R_S/Q や ω_c はずいぶん変わってくる．ビーム近傍の電子だけがコヒーレントに運動するとすると，$n_e=2\pi\sigma_x\sigma_y\rho_e$ として，2，3 で述べたように評価すればよい．しかし電子雲全体がガウス分布を保ったまま運動するとすると，

$$\sigma_i=\sqrt{R^2+\sigma_{i,b}}\approx R \qquad (61)$$

となりまったく違った wake function になってしまう．(周波数が低くなる．)

想像するにビームの力は遠方で小さくなるので，雲

表 4　いくつかの陽電子蓄積リングにおける単バンチ不安定性の電子密度に対する閾値

variable	symbol	KEK–PF	KEKB	super KEKB	BEPC–II	ILC–DR
circumference	L (m)	186	3016	3016	240	6477
energy	E (GeV)	2.5	3.5	8.0	1.5	5.0
bunch population	N_p ($\times 10^{10}$) m^{-1}	0.7	8.4	4.1	4.9	18.4
bunch length	σ_z (mm)	10	7	3	15	6
beam size	σ_x (mm)	0.5	0.5	0.5	1.2	0.13
energy spread	σ_E/E (%)	0.073	0.07	0.07	0.052	0.13
slippage factor	η ($\times 10^{-4}$)	43	2.7	2.7	261	1.3
electron oscillation	$\omega_e\sigma_z/c$	0.9	2.5	2.2	2.3	14.1
threshold	$\rho_{e,th}$ (10^{12} m^{-3})	2.9	0.54	1.1	6.1	0.7

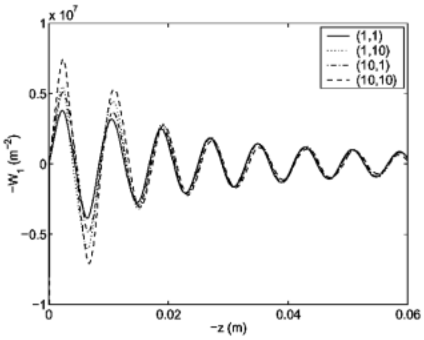

図 4　数値的に求めた電子雲による短距離 wake force[12]，電子雲のサイズは $\sigma_x\times\sigma_y$, $10\sigma_x\times\sigma_y$, $\sigma_x\times 10\sigma_y$, $10\sigma_x\times 10\sigma_y$

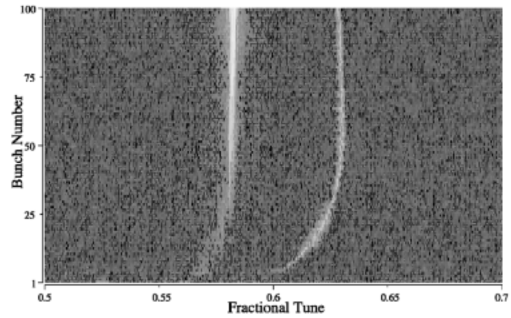

図 5　電子雲による単バンチ不安定性を示すバンチに沿ったシンクロベータサイドバンドスペクトルの測定[10]

全体がコヒーレントに動くことは考えにくい．どう考えるかは人によって違うので，どちらが正しいかは数値的に確かめるしかない*4．数値的に wake function を調べるには 5.2 節と同様に，式(23)を求めた方法に沿って，計算機上で行う．

数値計算の結果，wake function はビームサイズ程度の電子雲が運動していると考えて良いことがわかる．もう少し細かく言うと実効的に wake function に効く電子は，電子雲を十分大きくとっても（$10\sigma_x\times 10\sigma_y$），$cR_S/Q$ の値で，$n_e=K\times 2\pi\sigma_x\sigma_y\rho$ に換算して，$K=2.5$ 程度の増大にしかならないことがわかる．wake function の減衰から，線形理論では出せなかった $Q\approx 5$ 値も求められる．図 4 に KEKB の場合の wake function を示す．

またバンチはシンクロトロン振動をしているので，e-p 不安定性と同様にランダウ減衰が効き，安定化する．結果として不安定性が起こる閾値は式(48)で計算される．表 4 にさまざまな陽電子リングの電子密度の閾値を示す．この値と 5.1 で求めた，電子密度との比較で不安定性が起こるかが推測できる．

電子はバンチとの相互作用が進むにしたがってビーム周辺に集められる．そのため wake force はバンチの先頭と後方ではかなり違ったものになると推測できる．これは wake function が変異点と作用点の差だけの関数ではないことを意味する．$\omega_c\sigma_z/c>2\pi$ になると解析的方法との違い，wake function を使った近似からのずれが顕著になる．そういった状況では相互作用を，より現実的な数値モデルでシミュレーションする．

この不安定性はバンチ内のヘッドテイル不安定性として見ることができる．周波数で言うとベータトロンに対するシンクロトロンサイドバンド $\omega_\beta\pm\omega_s$ として観測されるはずである．実際 KEKB において，ビームサイズの肥大と，それに伴いサイドバンドが観測されている．その閾値もほぼ予測と一致する．図 5 に

*4 実際筆者は，いくら議論しても雲全体がコヒーレントに動くという人に何人か会った．どちらが多数派なのか調べてみたいところである．

ベータトロンとそのサイドバンドのスペクトルを示す．縦軸はバンチ番号で下が先頭バンチである．左側の白い線がベータトロン，右側がサイドバンドで $\omega_\beta + a\omega_s$，$2 > a > 1$ である．ソレノイドオン，オフで消えたり現れたりする．サイズ肥大はルミノシティを悪化させたため，リング全周にソレノイドコイルを巻き，そのサイズ肥大を抑えることで，ルミノシティが飛躍的に向上したことは良く知られている．

6. まとめ

加速器に見られる2流体不安定性について，全体論，e-p，イオン，電子雲不安定性についておもに解析的な観点から述べた．定性的に，ファクターを無視すれば定量的にも，解析的手法で2流体不安定性をよく説明できる．実際には解析的手法では考慮できないいろいろな条件があるので，数値的手法の助けやシミュレーションが必要になる．シミュレーションについては結果のみを述べたが，別の機会があれば書いてみたい．

シミュレーションもいきなりコードを書いて結果が出ても，結果の妥当性の評価ができない．今の世の中計算機が発達しているので，あまり凝った解析的扱いは必要ないとは思われるが，物理の本質的なところを理解しておくために，線形理論は重要である．

最後に電子雲効果の発見当初から，多く儀論をしてくださったKEKPF，KEKBの方々，海外の研究者の方々に感謝します．

参考文献

1) E. Keil and B. Zotter, ''Landau damping of coupled electron-proton oscillations'', CERN–ISRTH/71–58 (1971).

2) K. Ohmi, T. Toyama and G. Rumolo, ''Electron cloud instability for a coasting proton beam in circular accelerators'', proceedings of ECLOUD04, 351 (2004).

3) M. Izawa, et al., ''The vertical instability in a positron bunched beam'', Phys. Rev. Lett. 74, 5044 (1995).

4) T. Raubenhemer and F. Zimmermann, ''Fast beam-ion instability I. Linear theory and simulations'' Phys. Rev. E**52** 5487 (1995).

5) G. Stupakov et al., ''Fast beam-ion instability II. Effect of ion decoherence'', Phys. Rev. E**52** 5499 (1995).

6) K. Ohmi, ''Beam-photoelectron interactions in positron storage rings'', Phys. Rev. Lett. **75**, 1526 (1995).

7) K. Ohmi, ''Numerical study for the two-beam instability due to ions in electron storage rings'', Phys. Rev. E**55**, 7550 (1997).

8) S. S.Win et al, ''Numerical study of coupled bunch instability caused by an electron cloud'', Phys. Rev. ST–AB, **8**, 094401 (2005).

9) M. Tobiyama et al., ''Coupled bunch instability caused by an electron cloud'', Phys. Rev. STAB, **9**, 012801 (2006).

10) J. Flanagan et al., ''Observation of vertical betatron sideband due to electron cloud in the KEK LER'', Phys. Rev. Lett. **94**, 054801 (2005).

11) K. Ohmi and F. Zimmermann, ''Head-tail instability caused by electron cloud in positron storage rings'', Phys. Rev. Lett. **85**, 3821 (2000).

12) K. Ohmi, F. Zimmermann, E. Perevedentsev, ''Wakefield and fast head-tail instability caused by electron cloud'', Phys. Rev. E**65**, 16502 (2002).