

PF リングにおける非線形なベータトロン共振曲線の観測

本田 融*・上田 明・三橋利行・宮島 司

Nonlinear Frequency Response of the Betatron Oscillation
at the Photon Factory Storage Ring

Tohru HONDA, Akira UEDA, Toshiyuki MITSUHASHI and Tsukasa MIYAJIMA

Abstract

Octupole magnet takes an important part in the cure of the transverse instability at the Photon Factory storage ring. Under the existence of the octupole field, remarkable asymmetric frequency-response curves were observed in the excitation of the vertical betatron oscillation. The form of the response curve depended on the octupole current and the direction of the frequency scan. The betatron resonance continued much above the betatron tune and the amplitude of the oscillation suddenly fall down at the end. The frequency response extended to about 20 kHz higher than the tune frequency when the maximum octupole field was applied. Such asymmetric frequency responses appeared only for the positive frequency scan. We have found that the observed frequency response for the betatron oscillation has many similarities with the frequency response of the nonlinear forced oscillation described by the Duffing equation.

1. はじめに

PF リングは KEK の蓄積エネルギー 2.5 GeV, 周長 187 m の電子蓄積リングである。1982 年の立ち上げ以来約 25 年近くの間放射光源リングとしてユーザー運転を続けている。この間 1986 年と 1997 年の 2 度にわたって高輝度化を行い、開業当初 450 nm rad であった水平エミッタンスは 130 nm rad を経て 36 nm rad まで改善されている。特に 1997 年の高輝度化は蓄積リングの約半周におよぶノーマルセル部で四極電磁石と六極電磁石の数を倍増し、真空ダクトを更新するという大改造を伴うものであった。そして 2005 年度には直線部増強計画¹⁾のため、2 度目の蓄積リング大改造を行っている。今回の改造範囲は高輝度化改造で更新したノーマルセル部を除いた残りの直線部で、当該範囲にあるすべての四極電磁石と真空ダクトを更新し、挿入光源や RF 空洞等が設置されている既存直線部の大幅な延長と 4 か所の新しい短直線部の増設を実現する。直線部の延長によって新タイプの挿入光源の導入の選択肢が広がり、また新設の短直線部には X 線領域のスペクトルを持つ短周期アンジュレータを光源とする新ビームラインが建設される。

1997 年の高輝度化前には約 7 年間陽電子でユーザー実験を行ったことがあった。陽電子運転の主な利点はビーム寿命の改善であった。KEKB 運転開始に向けた入射器のエネルギー増強の影響もあり高輝度化改造と相前後して電子による運転に戻り今日に至っている。大改造後のビーム寿命の回復には 2 年あまりの期間を必要としたが、その間に開発された RF 位相変調法²⁾の効用もあって 400 mA で 60 時間以上という以前の陽電子運転に比べても遜色のないビーム寿命でユーザー運転が続けられてきた。

電子ビームの蓄積時に実用上問題となる現象の一つが垂直方向に観測される横方向ビーム不安定性³⁾である。この横方向ビーム不安定性を緩和するためにハーモニック数 312 に対して連続した 280 バンチに電子をつめ、残りの 32 バンチを空にしたパーシャルフィル運転を行っている。パーシャルフィルにしてもなお弱いビーム不安定性が残り、これを完全に抑制するために八極電磁石が用いられてきた。八極電磁石による不安定性抑制は一般に tune spread に伴って生じる Landau damping によると解釈されている。しかし八極磁場に対する実際のビームの応答は理論的に明快でない複雑な側面もあり、PF リングでは単バンチビー

* 高エネルギー加速器研究機構 物質構造科学研究所 放射光源研究系
Photon Factory, Institute of Materials Structure Science, KEK, High Energy Accelerator Research Organization
(E-mail: tohru.honda@kek.jp)

ムの振幅依存チューンシフトやダイナミックアパーチャ等について高速キッカーと位相空間モニターを用いて解析が進められてきた⁴⁾。またパルスの八極磁場を発生させてビーム不安定性の成長や抑制の過渡現象を観測する試みも続けられている⁵⁾。

PF リングではシングルバンチ運転時にバンチの純化操作⁶⁾、すなわちバンチ純度を高く保つためにメインバンチ以外のバンチのベータトロン振動を励起して蹴り落とす操作を常時行っている。このような状況下で水平、垂直方向のチューンを同時にモニターするためのビーム励起源としてコンパクトな磁気ビームシェイカーを設置した。従来チューン測定に用いているストリップライン電極を用いた RFKO システムを補完するものであるが、ビームテストの段階でビームダンプにいたる寸前までビーム振動を励起したときにチューンに対して全く左右非対称の共振曲線が記録されることに気がついた。ビームを蹴り落とす目的で強く励振するとき幅の広い共振波形が見られること、またバンチ純化においては周波数が増加する方向に掃引をした時のみ効率よくビームを蹴り落とすことが出来ることは運転上しばしば経験されていた。しかしたいの場合共振曲線の記録はチューン測定を目的としており、今までに非対称な共振曲線の記録をとった例はあまりなかった。今回特に蓄積リングの持つ非線形磁場と観測される共振曲線の形状の関連性に興味を持ち詳細に調査を行った。

本論文ではまず PF リングで八極電磁石に流す電流値を変えたとき蓄積ビームの横方向不安定性が抑制されたり、逆に励起されたりする様子を 2 節で紹介す

る。次に 3 節では蓄積電子ビームのベータトロン振動をビームシェイカーで励起したときに観測された非対称な共振曲線を紹介する。励振周波数を増加する方向に掃引したときと減少する方向に掃引したときには全く異なる形の共振曲線が得られる。そしてこの共振曲線の形状もまた八極電磁石の励磁電流を変えることに強く依存することが判ったのでその観測結果について述べる。4 節では一般的な非線形振動方程式の解析結果と比較して八極磁場の存在とベータトロン振動共振曲線の掃引方向依存性や形状変化との関連について定性的な考察を加えようと思う。

2. 八極電磁石によるビーム不安定性の抑制

図 1 に示したように PF リングには 4 つの八極電磁石が設置されている。各々の場所での水平と垂直方向のベータ関数の値を図の括弧の中に記した。PF の八極電磁石の一番重要な役割は垂直方向のビーム不安定性の抑制にあるので垂直方向のベータ関数が大きめの値を持つ場所に置かれている。通常 4 台の八極電磁石を個別に励磁することはなく同時に同一の電流を流す。本論分においては以下 4 台の八極電磁石にすべて同時に同じ電流を流したという意味で、単に八極電磁石の電流値は何 A という表現をする。

八極磁場のポテンシャルは、

$$V_4 = \frac{1}{24} S_4(s) (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad (1)$$

$$S_4(s) = \frac{1}{B\rho} \frac{d^3 B_y}{dx^3} = \frac{K_3}{L} \quad (2)$$

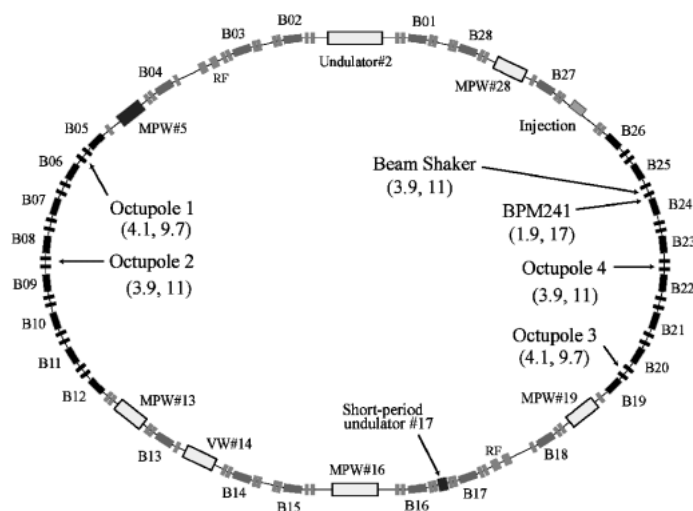


図 1 4 つの八極電磁石とビームシェイカーの配置。括弧の中の 2 つの数字はそれぞれのコンポーネント位置での水平、垂直方向のベータ関数の値 (単位 m) である。

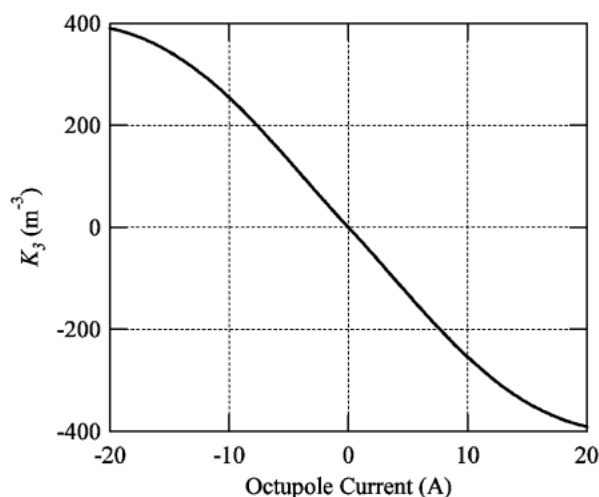


図2 八極電磁石の強さ K_3 (m^{-3}) の励磁電流依存性.

と表される. ここに $B\rho$ は magnetic rigidity, L は八極電磁石の有効磁場長, K_3 が八極磁場の強さである. 一台あたりの励磁電流と八極磁場の強さ K_3 (m^{-3}) の関係は図2のようになっている. 最大電流値 ± 20 A で約 400 m^{-3} の八極磁場が発生する.

PF リングに電子を蓄積するとき, 間隙を空けることなくすべてのバンチに電子を入れると強い垂直方向のビーム不安定性が観測される. この不安定性はイオン捕獲に起因する不安定性であると解釈されている. このフルフィルでの不安定性は八極電磁石を励磁しても抑制することは出来ない. 垂直方向のビーム不安定性を緩和するためにバンチ列に間隙を設けるパーシャルフィルの方法をとっている. 先に記したように通常 280 バンチのバンチ列に電子を入れて, 初期電流値 450 mA でユーザー運転が行われている. パーシャルフィルによってビーム不安定性は確かに弱くなるが, 少なくともユーザー運転で利用される電流値の範囲 350 mA から 450 mA では全域でやはり垂直方向のビーム不安定性が生じる. パーシャルフィルのビーム不安定性は八極電磁石をある値以上の電流で励磁すると安全に抑制される.

図3に水平, 垂直のビーム不安定性が八極電磁石の励磁電流に依存してどのように変化するか測定したデータを示す. 横軸は八極電磁石の励磁電流, 縦軸はあるひとつのボタン電極信号にみられた水平, 垂直のベータatronサイドバンドの振幅を対数表示している. 測定に使用したボタン電極の水平, 垂直方向の感度の違いは補正していない. よって各々の方向でのスペクトル強度の八極磁場に対する変動に注目してもらいたい. 強度 -96 dBm 付近がこの測定での雑音レベ

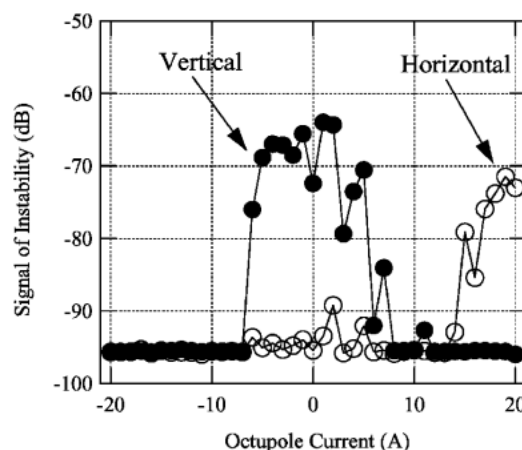


図3 PF リングの横方向ビーム不安定性の八極電磁石電流に対する依存性. バンチ列 290 バンチ, 蓄積電流値 447 mA, RF 位相変調をかけない状態での測定結果.

ルで, 信号がこのレベルにあるときはビーム不安定性が起こっていないことを示す. 図中黒丸で描かれているのが垂直方向の, 白丸が水平方向のビーム不安定性のビームスペクトル強度である. 図3の測定例は 290 バンチのパーシャルフィルに対するデータであるが不安定性の発現と抑制の様子は 280 バンチのときもほぼ同様である. 八極電磁石を正に励磁しても負に励磁しても約 6 A より大きい電流を流すと垂直の不安定性のピークが完全に見えなくなる. 通常のマルチバンチのユーザー運転では八極電磁石を -15 A まで励磁することによって不安定性を抑制している. ただ八極磁場の影響でダイナミックアパーチャが減少するため入射効率の悪化を招く. よって入射中は八極の励磁電流は通常 -1 A まで下げている. またシングルバンチ運転時はマルチバンチのときのような垂直方向のビーム不安定性は見られないので通常八極の励磁は行わない.

PF リングでは八極電磁石を正の方向に励磁して運転することはあまりないが, 正の方向に励磁電流を増やして行くと垂直方向の不安定性が治まる代わりに水平方向の不安定性が発現する. 図3の白丸を見ると八極電流値 $+15$ A 以上で水平方向の不安定性のピークが強ク現れている様子がわかる. これに関しては八極電磁石によって負の K_3 が加わり, 結果としてリング全体の八極磁場成分が減少し, tune spread が小さくなって Landau Damping 弱くなり水平方向の不安定性が成長し始めると考えることが出来よう.

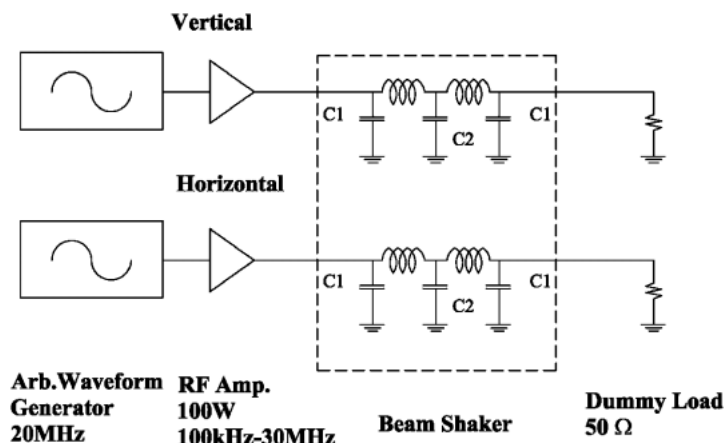


図4 ビームシェイカーのブロック図. 水平と垂直方向にそれぞれ2ターンコイルを巻いたウィンドウフレーム型フェライトコア磁石とセラミックダクトで構成されている.

3. ベータトロン共振曲線の観測

3.1 共振曲線の観測方法

本実験でベータトロン振動の励起源として用いたのはセラミックダクトとウィンドウフレーム型フェライトコア磁石で構成したビームシェイカーであった. 図4にそのブロック図を示す. 水平, 垂直方向にそれぞれ2ターンコイルを持ち, また信号源も2系統備えており両方向に同時に独立の励起信号を入力することが出来る. 終端にダミーロードを接続し, 出来るだけ広い帯域で50オームに整合するように回路定数を調整した結果3dBバンド幅で, 水平方向に25MHz, 垂直方向に18MHzまで帯域を確保することが出来た. RFアンプは帯域30MHz, 利得50dBで最高出力100Wである. 30MHz帯域を持つ任意波形発生器を信号源として用いベースバンドからその10倍程度の範囲においてフラットな特性で, 白色雑音から正弦波まで様々な波形でビーム振動を励起することが出来る. 白色雑音による励起はチューンの常時モニターを行うときに良く用いている.

ビームシェイカーに正弦波を入力したとき発生する磁場の強さを図5にプロットした. 横軸はRFアンプへの入力パワーで縦軸が発生する磁場の強度である. 最大磁場は水平に 1.6×10^{-4} T, 垂直に 0.8×10^{-4} Tとなっている. 設置場所とその場所でのベータ関数は図1に示したとおりである. またビームシェイカーの磁場長は130mmである.

本論分では垂直方向のベータトロン振動の観測に的を絞って報告する. 振動の検出はビームシェイカーの直上流のBPMの一個のボタン電極信号を用いた. 図1の中にBPM241と図示したのがそれで, 垂直方向

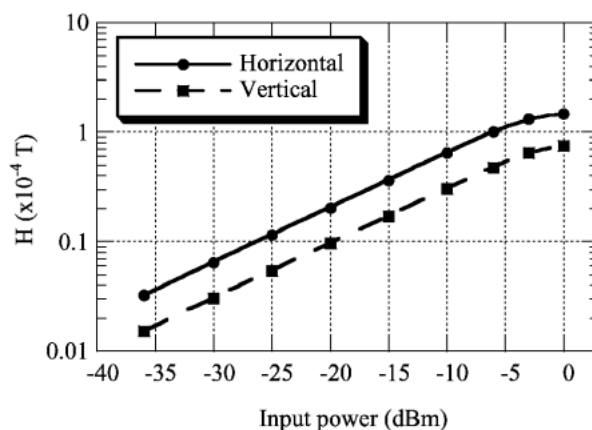


図5 ビームシェイカーの入力パワーと発生する磁場の強さ.

に大きなベータ関数を持ち垂直振動検出には適した場所である. 共振曲線の観測はリアルタイムスペアナ (Tektronix RSA230) で $F_{RF} = 500.1$ MHz の右側のサイドバンドピークを利用した. ひとつひとつの共振曲線はスペアナの平均操作を max hold に設定し多数回の周波数掃引の平均として取得した波形である.

PFリングの通常のオペレーションポイントは $(v_x, v_y) = (9.60, 4.28)$ である. 周回周波数は $f_{rev} = 1.6$ MHz であるので垂直のベータトロン振動の基本周波数は約450kHzである. 任意波形発生器の正弦波出力を幅100kHz程度(400kHzから500kHz)で繰り返し掃引する. 正, 負の掃引方向については別々に共振曲線を記録した. 周波数掃引の繰り返し周期は約1秒であった. また共振曲線の測定時はビーム寿命の改善と縦方向のビーム不安定性の抑制に使われているRF位相変調はかけない状態で, またアンジュレータ等の挿入光源のギャップは許容される範囲内で最大ギ

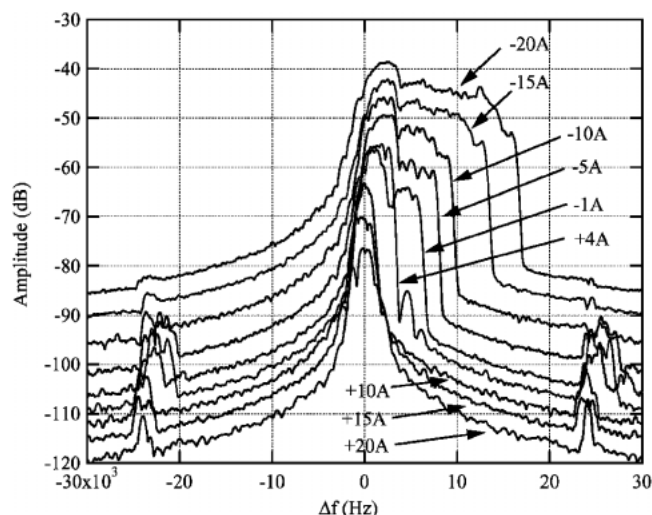


図6 垂直方向ベータatron振動の共振曲線の八極磁場依存性. マルチバンチ, 蓄積電流値 33 mA~45 mAにて, 正方向の周波数掃引. 矢印で示したのが八極電磁石の励磁電流値.

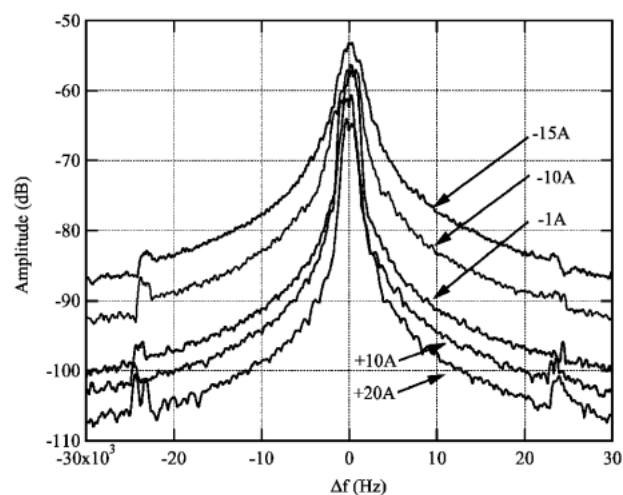


図7 垂直方向ベータatron振動の共振曲線の八極磁場依存性. マルチバンチ, 蓄積電流値 33 mA~45 mAにて, 負方向の周波数掃引. 矢印で示したのが八極電磁石の励磁電流値.

ャップまで開いておいた. 縦方向超電導ウィグラー (VW#14) は常時励磁されていた.

3.2 共振曲線の掃引方向依存性と八極磁場依存性 (マルチバンチ)

図6に示したのがマルチバンチ運転時 (パーシャルフィル, 280バンチ) に観測された垂直方向のベータatron振動の共振曲線である. スペクトラムアナライザで観測した F_{RF} の上側ベータatronサイドバンドの強度を dB 単位でプロットしている. 測定時の蓄積電流値は通常ユーザー運転の約 1/10 の 40 mA 程度であった. 図6は正の方向に周波数掃引をしたときの記録である. 各共振曲線のそばに矢印で示した電流値が測定時の八極電磁石の励磁電流値である. 八極の電流は ± 20 A の範囲で測定をしたが, それぞれの電流値でビームダンプを起こさないように注意しながら出来るだけビームシェイカーの励起を強くして共振曲線を記録した. 八極の電流値が -20 A に近いほどすなわち K_3 の値が大きいほど, ビームシェイカーへの入力信号が強くなる傾向が現れた. 図6の測定はビームシェイカーの入力が -15 dBm から -22 dBm の範囲で行われた. また共振曲線の形状を見やすくするために各曲線は対数表示の縦軸に対して適当に位置をずらして表示している. よって各曲線同志の強度の違いではなく主に形状の変化に注目して見ていただきたい.

また八極電磁石の励磁電流を変えるとベータatronチューンに多少の変動がみられた. 実際チューンは八極電流値を -20 A から $+20$ A に変えたとき約 15 kHz 増加した. 図6の横軸はそれぞれの測定時に微

小なビームシェイカー入力で測定したチューンの値を 0 として, そのまわり ± 30 kHz の範囲の共振曲線を表示している.

観測された共振曲線の特徴をあげると以下のようなものである. 八極の電流値がマイナス側に大きな値を持つときは一度あまり鋭くないピークを描いた後 $+10$ kHz ないし $+20$ kHz ほど高い周波数まで大きい振幅を維持して最後に急激に振動がおさまる. 八極の電流値が正の方向に大きくなるとこのような特徴は弱くなり, $+10$ A よりも大きい電流値に対してはほぼ左右対称の共振曲線が観測されている. また八極の電流値が正のときに左右対称に ± 23 kHz あたりに現れているピークはその出現位置から見てシンクロtron振動のサイドバンドである. シンクロtronサイドバンドの出現は八極の電流を負にすると抑制されてしまっている.

図7は図6と同じ条件での測定であるが, 唯一周波数掃引の方向が反対である点異なる. 八極の電流値が負のときのほうが観測されるピークの半値幅が大きい傾向が見えている. 図6で見られたような左右非対称な共振曲線は現れない. チューンの値を中心に左右対称のピークが観測される. また正方向の周波数掃引時とのもうひとつの違いは, 反対掃引の時はこの実験で用いたビームシェイカーの最大出力で励振してやってもビーム電流が減ったり, ビームダンプが起こったりしないということである. ビームシェイカーの限られた励振パワーでビームを蹴り落とすには必ず正方向に周波数を掃引してやらなければならない.

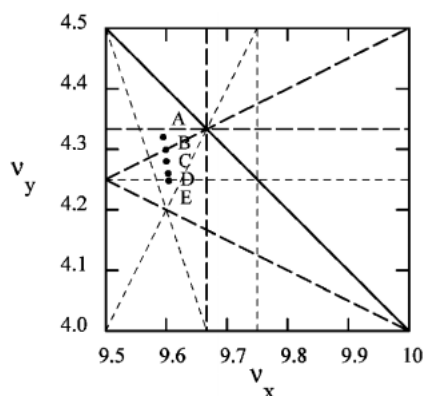


図8 共振曲線を測定した5つのオペレーションポイント.

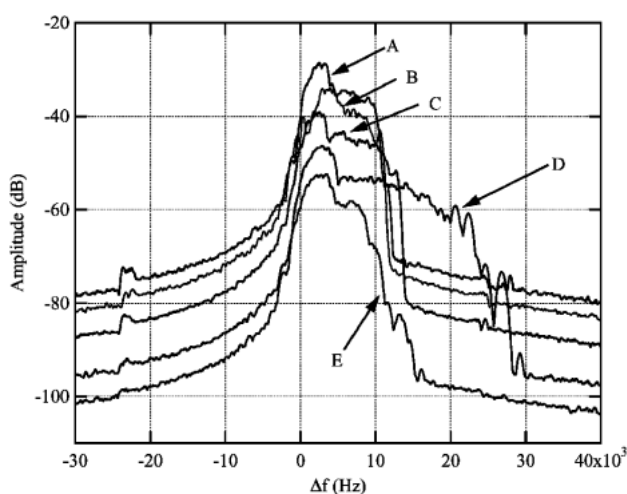


図9 図8のAからEの5つのオペレーションポイントでの共振曲線, 八極電磁石の電流値は-15 Aに固定.

共振曲線の形とチューンダイアグラム上のストップバンドとの関連性を調べるために垂直方向のチューンを変動させて観測を試みた. 蓄積ビームを保持したままで比較的狭い範囲でしかチューンを動かしていないが, 図8にAからEの記号で示した5つのオペレーションポイントで共振曲線を記録した. 図8には近くを通る4次までの共鳴線を描き入れてある. 実線は2次, 破線が3次そして細めの破線が4次の共鳴線である.

観測結果を図9に示す. 図6, 図7の測定は(v_x, v_y) = (9.60, 4.28)で行われたものでオペレーションポイントはC点に相当する. 図9でA, B, Cの3点での共振曲線の形はあまり違いが見られない. 唯一D点では大きい振幅が25 kHzを超えるところまで持続しており, また持続した振幅の下がり方があまり急峻では

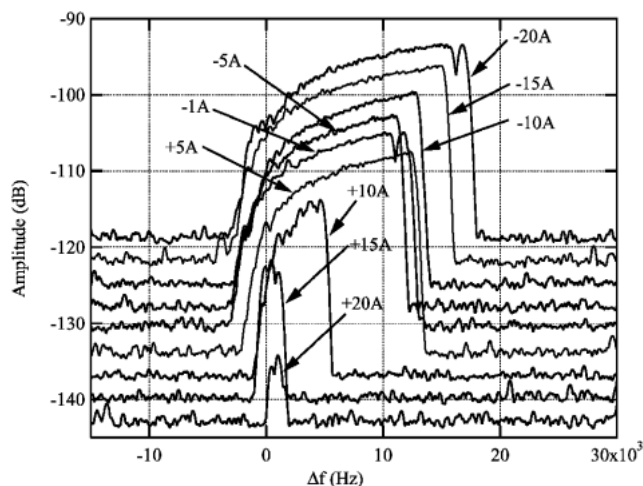


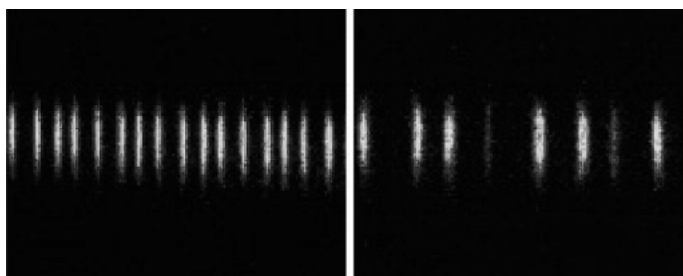
図10 垂直方向ベータトロン振動の共振曲線の八極磁場依存性. シングルバンチ, 蓄積電流値4 mA~5 mAにて, 正方向の周波数掃引.

ない. そしてE点では高い振幅の持続する範囲が狭まってしかも振幅の下がり方がこれも急峻ではない. このC点, D点の付近を通っているのは $4v_y = 17$ で与えられる4次の共鳴線である. この4次の共鳴線が存在することはファーストキッカーを使った実験⁴⁾で確認されており, 八極磁場が存在するときこの共鳴が起こると説明されている. 共振曲線の形状の変化はこの4次の共鳴線の存在になんらかの影響を受けていると考えられる.

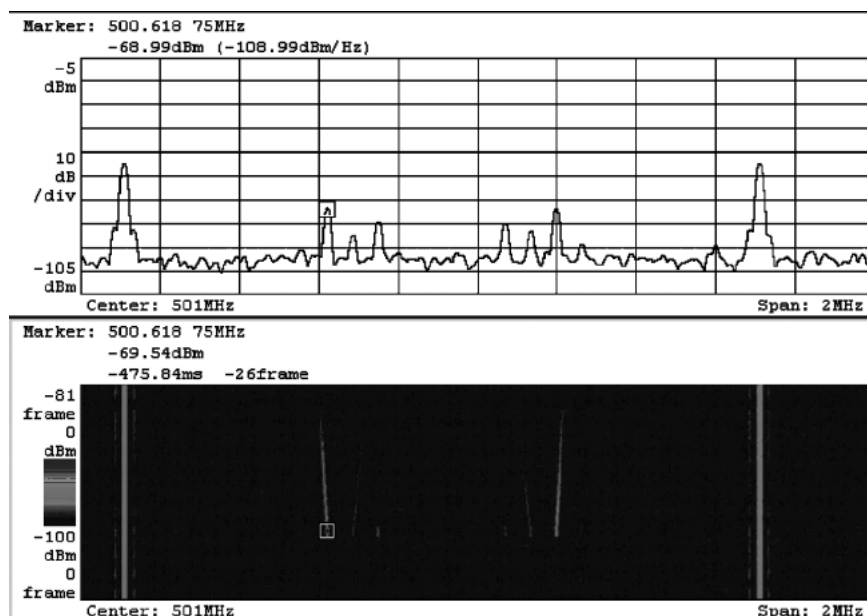
3.3 共振曲線とビーム振動の同時観測 (シングルバンチ)

非対称な共振曲線が観測される状況で, 実際にはバンチの振動がどのように見えるのだろうか. ストリークカメラを用いて観測してみようと思い, シングルバンチで実験を行った.

図6の測定と同様正方向の周波数掃引で測定された共振曲線を図10に示す. ビームシェイカーへの入力パワーは-10 dBm から-21 dBm でやはり八極の電流値が正に大きくなるに従い入力パワーも減少した. 非対称な共振が見られることは同じだが, 共振曲線の形は図6とは多少異なっている. 図6で見られたチューンの位置での緩やかなピークは見られず, 振幅が徐々に増大して行きながらあるところで急激に振幅がなくなるといった特徴を持っている. 八極の電流値が正になり+15 Aを越えたあたりから共振曲線がほぼ左右対称になっている. 八極の電流値+20 Aのときの振動の振幅が小さいのは, 主にビームシェイカーの入力パワーが小さいからである. この電流値ではこれ以上入力パワーを上げるとビーム寿命の短縮, あるいは



11 ストリークカメラによるシングルバンチビームの振動の観測. 画面上横方向の1ターン毎のビーム同志の間隔の変動が垂直方向の重心振動に相当. 左側の写真は振幅が小さいときに観測される重心の振動. 右側の写真は非対称な共振曲線が観測される状況で記録されたもので, バンチ内電子分布の変動によると思われるバンチの濃淡が見られる.



12 非対称な共振曲線が見られるときのスペクトルの時間変動. 下の図の時間軸は上から下へ流れる. 励振周波数の2倍のピークが現れている. 共振曲線がジャンプする直前に4倍波と推定されるピークも現れる.

ビームが削れる現象が直ぐに発生する. すなわち八極の電流値が正に大きいほど, 小さな振幅でビーム電流が削れる傾向が見られた. また図には掲げていないが負の方向の周波数掃引に対してはマルチバンチの時と同じようにどの八極の電流値に対しても左右対称の共振曲線が観測された.

図 11 にビームシェイカーで励振しているときに2軸掃引のストリークカメラで撮ったビーム振動の写真を示した. 1ターン毎のバンチの映像が横方向に並んでおり, バンチの頭と尾は1ターンごとに上下が逆転しているが, 横方向のバンチ間隔の変動としてバンチの垂直方向の重心振動が観測される. 図 11 の左側の写真はビームシェイカーの励振信号が弱いときに記録されたもので, バンチがその形を崩すことなく垂直方向に振動している様子が映し出されている. 一方右

側の写真は, 図 10 で非対称な共振曲線が観測されるような状況で記録されたもので, ターンごとにバンチに濃淡が生じている. これは最早バンチが単純な重心の振動にとどまらず, そのバンチ内の電子の分布形状を変えるような振動を起こしていることを表していると考えられる.

図 12 は同じく非対称な共振曲線が観測される状況でリアルタイムスペアナによって記録したスペクトルの時間変動である. 下半分の図がスペクトルの時間変動を表し, 図中時間は上から下へ流れる. 上半分のスペクトルは, 下の図の中でマーカー(白い四角)が表示されている時間に対応した周波数スペクトルである. 下図中に見られる2本の明るくて太い縦線のうち左端が $f_{RF} = 500.1 \text{ MHz}$, 右端が $f_{RF} + f_{rev} = 501.7 \text{ MHz}$ の周回周波数の信号である. f_{RF} の信号の右側

で周波数が増加する方向に長く斜めに流れているのが非対称な共振曲線に相当するベータatronサイドバンドである．対称に周波数が減少する方向に長く斜めに流れているのは $f_{RF} + f_{rev}$ の下側のベータatronサイドバンドである．そして図12中にはちょうどこれらのベータatronサイドバンドの2倍の周波数のところに少し振幅は小さいが同じく斜めに流れるスペクトルが記録されている．そして図12の上半分に表示されているスペクトルを見るとわかるように周波数掃引に従ってメインのベータatronサイドバンドが消える直前のところで第3のピークが出現している．このピークは周波数的にはベータatron振動の4倍波と推測される．1倍，2倍のピークは周波数掃引に応じて斜めに流れていく様子からその同定について疑いの余地はないが，第3のピークは周波数掃引との対応がこの記録からだけでは明らかではない点でほんとうに4倍のピークかどうか多少疑問が残る．

4. 考 察

八極電磁石の励磁によってダイナミックアパーチャなどリングの様々な性質が影響を受けるが，今回の測定で垂直方向のベータatron振動の共振曲線の形状が変化することが明らかとなった．ではどうして八極磁場 K_3 を変動させたとき例えば図10のような共振曲線の形状変化が見られるのであろうか．この点に関しては非線形な強制振動を記述する方程式から導かれる共振曲線とその形を比較することによって定性的に理解される．

ベータatron振動の方程式は周知の Hill's equation $\ddot{y} + K(s)y = 0$ である．式(1)，(2)で与えられる八極磁場が存在するときこの方程式は，

$$\ddot{y} + K(s)y - \frac{1}{24} S_4(s) (-6x^2y + 4y^3) = 0 \quad (3)$$

となるが，垂直方向のみの振動を想定し $x \approx 0$ としてやると，

$$\ddot{y} + K(s)y + \frac{1}{6} S_4(s)y^3 = 0 \quad (4)$$

という形をとると考えられる．

一般に x^3 の非線形項を含んだ強制振動の微分方程式，

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + ax + bx^3 = F \cos \Omega t \quad (5)$$

は Duffing equation として知られている．ここに ax の項は減衰 (damping) を意味する．この項が全くゼ

ロであると固有振動数 ω_0 で振動を励起したときに振幅が発散してしまう．正弦波の外力は調和入力と呼ばれる．式(5)を微小なパラメータ ϵ を用いて書き直した方程式，

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\epsilon\mu\dot{x} + \epsilon\alpha x^3 = \epsilon k \cos(\omega_0 + \epsilon\sigma) \quad (6)$$

の解を $x = a \cos(\Omega t - \gamma)$ と仮定したとき摂動法によって解が求められる．共振周波数近傍での共振曲線の近似解が非線形振動の古典的な教科書⁷⁾に次式で与えられている．

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \pm \left(\frac{k^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2 \right)^2 \quad (7)$$

ここに σ は共振周波数からのずれを表すパラメータ (detuning parameter) で， a が強制振動の振幅である．また3次の非線形項の係数はパラメータ α ，減衰項の係数はパラメータ μ ，調和入力の大きさはパラメータ k で表されている．共振曲線は detuning parameter σ に対する振幅 a の依存性である．(7)式から σ と a の関係を求めてやると図13に示したような多価関数が得られる．図13は各パラメータの値を $\alpha=1, k=1, \mu=0.1, \omega_0=1$ として計算した．また測定結果との比較を容易にするため縦軸は対数目盛りでプロットしてある．

教科書に記述された共振曲線の振る舞いの説明によると，外力の周波数すなわち σ を準静的にプラスの方へ振ったとき，マイナスのほうへ振ったときにそれぞれ図13の中に描き込んだ矢印のように振幅が変動する．特徴的なのはプラスの方向へ振ったときで，実線で描かれた共振曲線に沿って徐々に振幅が増して行き，共振曲線のピークに達したとき真下の共振曲線

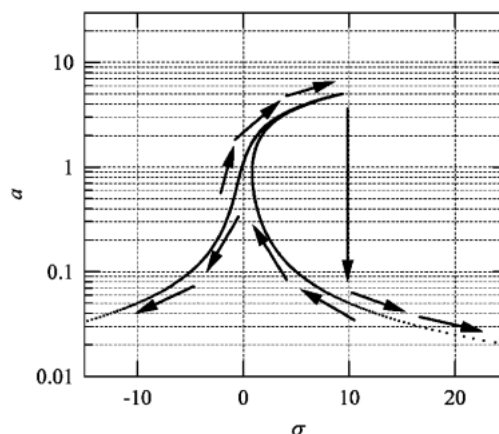


図13 Duffing 方程式の共振曲線 ($\alpha=1, k=1, \mu=0.1, \omega_0=1$).

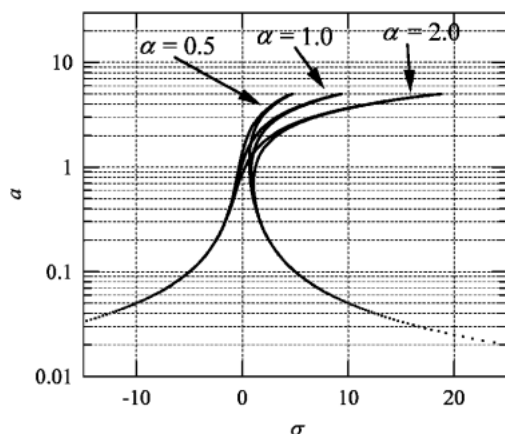


図14 Duffing 方程式の共振曲線の α 依存性. α 以外のパラメータは図 13 と同一. α が負のときは共振曲線は反対向きに曲がる.

へ振幅のジャンプが起こる. 逆方向に周波数を変えて行ったときにもピーク付近で微小なジャンプが起こりうるが全体としては左右対称の共振曲線が得られる. この定性的な共振曲線の振る舞いはシングルバンチで観測された図 10 の共振曲線と非常に類似している.

図 14 には非線形項のパラメータ α を変えたときの共振曲線の形の変化を示した. 非線形項が大きくなると共振曲線の右への曲がりが大きくなる. 実際の測定では八極電磁石の電流を負側に大きくする方向が八極磁場の強さ K_3 を強くする方向 (図 2 参照) であり, K_3 を大きくすると振幅がジャンプを起こす周波数がだんだん右へシフトしていく状況と定性的に良く一致している. ちなみに α が負の値を持つときは共振曲線の曲がりとは逆になるが, このような状況に相当する観測結果は今のところ得られていない.

マルチバンチのときに観測された共振曲線 (図 6) ではシングルバンチのときとは異なりチューンに相当するところで一旦緩やかなピークを描いているがこのような振る舞いは図 13, 図 14 との比較では説明できない. しかし K_3 を強くしていくに従って振幅がジャンプする場所が右へシフトしていく振る舞いはやはり良く一致している.

以上のことから本論分で観測された左右非対称なベータatron振動の共振曲線の形状はまさに八極磁場の存在とその強さを直接反映したもので, 一見非常に大きな tune spread を観測したようにも見えるが, 実はビームの非線形振動の特性のうち tune spread とはまた異なった側面を観測したものと見えよう.

図 12 では非対称な共振曲線が観測される状況でリ

アルタイムスペアナのデータに励振周波数の明らかな 2 倍波と, 加えて 4 倍波と推定されるピークが見られた. 非線形強制振動の特性からすると, 2 倍波のピークが観測されるということは実際の振動を記述する非線形微分方程式に y^3 の項のみ (式 (4)) ならず, y^2 の項も含まれるということになる. 垂直のベータatron振動に関する 2 次の非線形項, すなわちポテンシャル中の y^3 項は六極電磁石の設置角度誤差や八極電磁石中心とビーム軌道のずれによって現実の蓄積リングに存在することが指摘されている⁴⁾.

5. ま と め

PF リングでは八極電磁石が横方向の不安定性の発現や抑制に実用上も重要な働きをしている. まず垂直, 水平方向のビーム不安定性と八極磁場の関連性を明確に示すデータを紹介した. また八極磁場が存在するときベータatron振動の共振曲線に左右非対称で特徴的な振る舞いが観測されることを紹介し, 定性的ではあるが非線形振動の微分方程式 (Duffing equation) の解析結果と比較することによって共振曲線が示す左右非対称で特徴的な形状が八極磁場による非線形項に由来すると考えて間違いないことを示した.

参 考 文 献

- 1) S. Asaoka et al., "New upgrade project for the Photon Factory storage ring", AIP Conference Proceedings **705**, p. 161 (2004).
- 2) S. Sakanaka, M. Izawa, T. Mitsuhashi, M. Tadano and T. Takahashi, "Improvement in the beam performance by an RF phase modulation at the KEK Photon Factory storage ring", Proc. of EPAC 2000, p. 690, Vienna, Austria, Jun 26-30, 2000.
- 3) A. Mochihashi, T. Obina, Y. Tanimoto and T. Kasuga, "Vertical instability with transient characteristics in KEK-Photon Factory electron storage ring", Phys. Rev. ST AB, **4**, p. 022802 (2001).
- 4) T. Miyajima and Y. Kobayashi, "Determination of non-linear resonance parameters in electron storage rings", Jpn. J. Appl. Phys. **44**, p. 2006 (2005).
- 5) T. Miyajima, Y. Kobayashi and S. Nagahashi, "Pulse octupole magnet system at the Photon Factory storage ring", Proc. 2003 PAC, p. 2171, Portland, Oregon, May 12-16, 2003.
- 6) T. Obina, K. Haga, T. Honda, T. Kasuga and S. Sakanaka, "A new purification method for single bunch operation at the Photon Factory storage ring", Proc. 1999 PAC, p. 2310, New York, Mar 29-Apr 2, 1999.
- 7) A. L. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations* (John Wiley & Sons, Inc. New York 1979).