

# 円形加速器の高次ディスパージョンと クロマチシティのハミルトン形式による摂動計算

高雄 勝\*

## Hamiltonian Formulation of Higher Order Dispersion and Chromaticity of Circular Accelerators

Masaru TAKAO\*

### Abstract

For the purpose of describing the dynamics of off-momentum particles in strong focusing ring accelerators with strong sextupole magnets, it is indispensable to know the higher order dispersion and chromaticity. Hence we established the Hamiltonian Formalism of non-linear dispersion and chromaticity of circular accelerators and gave the perturbative formulae explicitly. In this paper we review the outline of the Hamiltonian Formulation of the dispersion and the chromaticity.

## 1. はじめに

高輝度放射光光源などの最近の電子蓄積リングは極限までビームを絞るため、収束力が大変強いものになっている。その強力な収束力が作る色収差を補正するために強い六極磁場が要求され、リングの光学系は非線形性の強いものになる。そのような状況の下でエネルギーのずれた粒子の運動を考察しようとする、線形近似では間に合わず高次項を取り入れることが不可欠になってくる。実際、SPring-8蓄積リングにおいてはディスパージョンやクロマチシティの高次項が粒子の運動に大きく影響している。例えば、線形クロマチシティを0近くに設定したとしても、僅かなエネルギーのずれに対して高次項の影響で大きくベータatronチューンが変化することもある。この結果、エネルギーのずれた粒子はすぐに共鳴線を横切るなど運動が不安定になり蓄積粒子が失われたりする。

このように運動量のずれた粒子の運動を考察するためにはクロマチシティの高次項が必要となるが、我々は円形加速器のディスパージョンとクロマチシティのハミルトン形式による定式化を行い、高次項の摂動公式を導いた<sup>1-5)</sup>。一次のオーダーであれば直感的に公式を書き下すことも容易であるが、高次となると

難しいものとなる。実際、高次公式を詳細に表した例はなかなか見つけることができない。我々は、ハミルトン形式に基づいて摂動展開を行うことにより、系統的に高次項を計算する手法を確立した。そこではまず高次ディスパージョンの再帰表式が導かれ、逐次これを計算できることを示した。SPring-8蓄積リングの場合にこれを適応して四次までのディスパージョンを求め、実測と比較することにより公式の正当性を確認した。次にディスパージョン軌道の周りでハミルトニアンを展開することにより、運動量のずれた粒子の従う運動方程式を求め、三次までの高次クロマチシティの表式を導いた。またこの定式化でベータatron関数のエネルギー収差の表式も得られるが、先に求めたクロマチシティと整合が取れていることを示した。本論文は、この定式化について説明するものである。主に、2次のオーダーを高次項の例として詳解する。

## 2. ディスパージョン

リング内を運動する荷電粒子（質量  $m$ 、電荷  $e$  とする）のハミルトニアンは

$$H(x, p_x, y, p_y; s) = -(1 + K_x x) \times \left[ \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2} - eA_s \right]$$

で与えられる<sup>6)</sup>. ただしここで, 座標系はリングの設計軌道に結びつけられた曲線座標系を採用し, 独立変数として時間  $t$  の代わりに軌道長  $s$  を用いている. 独立変数をこのように取ったとき, ハミルトニアンとしては上で与えた縦方向の運動量を採用すればよい. また水平方向を  $x$  座標, 垂直方向を  $y$  座標とし, 水平方向の曲率  $K_x(s)$  のみある加速器を考えている.  $E$  は粒子のエネルギーで, 本来粒子の運動を記述する変数であるが, 横方向の運動やリングを周回する時間に比べてゆっくりしてしているので, リング一周にわたって一定と仮定してよい. 全運動量はエネルギーによって  $p \equiv \sqrt{E^2/c^2 - m^2 c^2}$  と表される. リングの設計全運動量  $p_0$  を用いてハミルトニアンおよび横方向運動量を規格化すると, ハミルトニアンは

$$H(x, p_x, y, p_y; s) = -(1 + K_x x) \times \left[ \sqrt{(1 + \delta)^2 - \left(p_x - \frac{e}{p_0} A_x\right)^2 - \left(p_y - \frac{e}{p_0} A_y\right)^2} - \frac{e}{p_0} A_s \right]$$

と無次元にすることができる. ここで,  $\delta = (p - p_0)/p_0$  は設計全運動量からのずれを表す. この規格化によって運動方程式は形を変えないことに注意しておく.

以下の議論では, 分離機能型磁石のみから成る加速器を考えることにする. またスキュー磁場およびソレノイド磁場もないものとする. 偏向電磁石のエッジ効果は, 端部に薄い多極磁石があるものとして近似することにする. この時, 磁場はベクトルポテンシャルの縦方向成分  $A_s$  のみを用いて書き表すことができる. 頭わにハミルトニアンを書き下すと

$$\begin{aligned} H(x, p_x, y, p_y; s) = & -[1 + K_x(s)x] \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} \\ & + \frac{1}{2}[1 + K_x(s)x]^2 + \frac{1}{2} g_0(s)(x^2 - y^2) \\ & + \frac{1}{6} g_1(s)(x^3 - 3xy^2) \\ & + \text{higher order potentials} \end{aligned} \quad (1)$$

となる. ここで,  $g_0$  は四極磁場の強さ,  $g_1$  は六極磁場の強さ (高次ポテンシャルも同様) である. これらは曲率  $K_x$  を含め, 軌道長  $s$  の関数である. これから

$\delta$  および  $x, y$  について摂動計算を行うわけであるが,  $\delta$  が 0 でなければハミルトニアンにディスパーションの起源である  $x$  の一次項が現れることを注意しておく. 六極磁場より高次のポテンシャルは六極磁場の取り扱いから容易に想像できるため, 表式が簡単になるよう以降では省くことにする.

ハミルトニアン(1)から導かれる運動方程式は

$$x' = (1 + K_x x) \frac{p_x}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p_x' = & K_x [\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} - 1] \\ & - (K_x^2 + g_0)x - \frac{1}{2} g_1(x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$y' = (1 + K_x x) \frac{p_y}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \quad (4)$$

$$p_y' = g_0 y + g_1 x y. \quad (5)$$

ハミルトニアンのところでも述べた通り,  $\delta$  の高次の非斉次項が水平方向の運動方程式(3)に現れる. このため,  $\delta$  が 0 でなければ  $x=0$  は運動方程式の解となり得ない. この内, リングに関する周期境界条件を満たす解がディスパーションで,  $x_\varepsilon, p_{x,\varepsilon}, y_\varepsilon, p_{y,\varepsilon}$  と表すことにする.

以下で, ディスパーション  $x_\varepsilon, p_{x,\varepsilon}, y_\varepsilon, p_{y,\varepsilon}$  をモーメントムのずれ  $\delta$  で

$$z_\varepsilon = \sum_{n=0} \eta_n^{(z)} \delta^n, \quad p_{z,\varepsilon} = \sum_{n=0} \zeta_n^{(z)} \delta^n, \quad (z=x, y). \quad (6)$$

と展開して, 運動方程式を摂動的に解き高次の表式を求める. この展開において, 零次項  $\eta_0^{(z)}, \zeta_0^{(z)}$  は COD を表すわけであるが, 運動方程式から直ちに 0 であることが分かる. 同じく垂直方向の運動方程式には非斉次項がないので, 垂直ディスパーションが現れないこと

$$\eta_n^{(y)} = \zeta_n^{(y)} = 0 \quad (n=1, \dots) \quad (7)$$

が結論される. 以降, 水平ディスパーションしかななく, 添字 ( $x$ ) は意味をなさないのを省略することにする.

残った水平ディスパーションの満たす運動方程式をオーダー毎に見ていくと, 先ず一次は,

$$\eta_1' = \zeta_1, \quad (8)$$

$$\zeta_1' = K_x - (K_x^2 + g_0) \eta_1 \quad (9)$$

となる. 水平ディスパーションのモーメントム  $\zeta_1$  を消去してやれば,

$$\eta_1'' + (K_x^2 + g_0)\eta_1 = K_x \quad (10)$$

なる通常の線形ディスパージョン方程式が得られる。  
次に二次は、

$$\eta_2' = \zeta_2 - \zeta_1 + K_x \eta_1 \zeta_1, \quad (11)$$

$$\zeta_2' = -\frac{1}{2} K_x \zeta_1^2 - (K_x^2 + g_1)\eta_2 - \frac{1}{2} g_1 \eta_1^2 \quad (12)$$

となっており、モーメント  $\zeta_1, \zeta_2$  を消去すると、

$$\eta_2'' + (K_x^2 + g_0)\eta_2 = -K_x \left(1 - \frac{1}{2} \eta_1^2\right) + 2K_x^2 \eta_1 - K_x^3 \eta_1^2 + g_0 \eta_1 - \frac{1}{2} g_1 \eta_1^2 \quad (13)$$

となる。右辺の非斉次項が、一次ディスパージョン方程式(9)のように単なる曲率  $K_x$  ではなく、一次ディスパージョン  $\eta_1$  を含む多項式になっている。一般に、高次ディスパージョン方程式は

$$\eta_n'' + (K_x^2 + g_0)\eta_n = R_n(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \quad (14)$$

( $n=1, \dots$ ) なる再帰的な方程式にまとめられることが示され、低次のディスパージョンから順次摂動的に求められることが分かる。 $R_n$  は、一次および二次ディスパージョン方程式(10), (13)にあるように、曲率  $K_x$  とディスパージョン  $\eta_m$  ( $m < n$ ) の多項式である。二次を見て分かる通り、次数が上がるとともに項数が指数関数的に増えていく。三次および四次ディスパージョンの具体的な方程式は、[2]に与えられている。

ディスパージョン方程式(14)は非斉次 Hill 方程式であるので、その周期解は設計の光学関数  $\beta_x(s)$  を用いて

$$\eta_n(s) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \int_s^{s+L} ds_1 R_n(s_1) \times \sqrt{\beta_x(s_1)} \cos(\pi \nu_x - |\psi_x(s) - \psi_x(s_1)|) \quad (15)$$

と表される。この表式を順次積分すれば、次々に高次ディスパージョンを計算することができる。あるいは、 $R_n$  を曲率と見なして直接ディスパージョン方程式(14)を積分しても求められる。

SPring-8 蓄積リングを例に、非線形ディスパージョンの計算を測定と比較してみよう。SPring-8 蓄積リングは4カ所の長直線部を含む44セルのチャスマングリーン光学系からなる。44セルの内訳は、長直線部上下流のマッティングセルと残り36個の通常セ

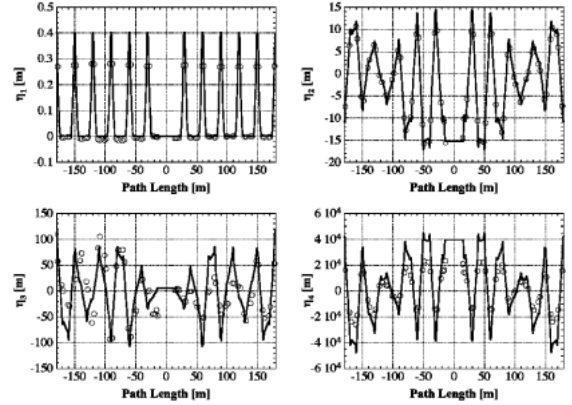


図1 SPring-8 蓄積リングのディスパージョン。

ルである。通常セルのセル長は30mである。ビーム位置モニターは、セルあたり6台(直線部4台、アーケ部2台)あり、ビーム位置のモーメント依存性からディスパージョンを求めた。図1に長直線部を中心に1/4周分の四次までのディスパージョンを示す。実線は計算されたディスパージョン、白抜き丸印はビーム位置モニターの測定結果である。大変よく一致していることが分かる。

### 3. クロマチシティ

ディスパージョン  $x_\epsilon, p_{x,\epsilon}$  が求まると、その周りの微小振動を考えることによりクロマチシティが計算できる。以下、これを紹介する。

変数変換

$$x \rightarrow x + x_\epsilon(s), \quad p_x \rightarrow p_x + p_{x,\epsilon}(s) \quad (16)$$

を行い、変数  $x, p_x, y, p_y$  に関して二次の項を拾い出すとディスパージョンの周りの微小振動を記述するハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_\beta(x, p_x, y, p_y; s) &= \frac{1 + K_x(s)x_\epsilon(s)}{2\sqrt{(1+\delta)^2 - p_{x,\epsilon}^2(s)}} \left[ \frac{(1+\delta)^2}{(1+\delta)^2 - p_{x,\epsilon}^2(s)} p_x^2 + p_y^2 \right] \\ &+ \frac{K_x(s)p_{x,\epsilon}(s)}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_{x,\epsilon}^2(s)}} x p_x \\ &+ \frac{1}{2} K_x^2(s)x^2 + \frac{1}{2} [g_0(s) + g_1(s)x_\epsilon(s)] (x^2 - y^2) \end{aligned}$$

が得られる。このハミルトニアンから導かれる運動方程式は行列の形

$$\begin{pmatrix} z' \\ p_z' \end{pmatrix} = \mathbf{S}_z(s) \begin{pmatrix} z \\ p_z \end{pmatrix} \quad (z=x, y) \quad (17)$$

にまとめると,

$$\mathbf{S}_x(s) = \begin{pmatrix} \frac{K_x p_{x,\epsilon}}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_{x,\epsilon}^2}} \frac{(1+\delta)^2 (1+K_x x_\epsilon)}{[(1+\delta)^2 - p_{x,\epsilon}^2]^{3/2}} \\ -K_x^2 - g_0 - g_1 x_\epsilon & -\frac{K_x p_{x,\epsilon}}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_{x,\epsilon}^2}} \end{pmatrix}$$

および

$$\mathbf{S}_y(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+K_x x_\epsilon}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_\epsilon^2}} \\ g_0 + g_2 x_\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

である. ここで,

$$\mathbf{S}_z(s) = \begin{pmatrix} A_z(s) & B_z(s) \\ -C_z(s) & -A_z(s) \end{pmatrix} \quad (z=x, y) \quad (18)$$

とにおいて,

$$\begin{pmatrix} z \\ p_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B_z^{-1/2} & 0 \\ B_z^{-1/2} \left( A_z - \frac{1}{2} B_z^{-1} B_z' \right) & B_z^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ p_z \end{pmatrix}$$

なる変数変換を行うと, 標準的な Hill 方程式

$$\begin{pmatrix} z' \\ p_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -G_z(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ p_z \end{pmatrix} = \mathbf{T}_z(s) \begin{pmatrix} z \\ p_z \end{pmatrix}, \quad (19)$$

即ち

$$z'' + G_z(s)z = 0 \quad (20)$$

が得られる. ここで,

$$G_z = B_z C_z - \left[ A_z - \frac{1}{2} (\log B_z)' \right]^2 - A_z' + \frac{1}{2} (\log B_z)''$$

である.  $G_z$  を運動量のずれ  $\delta$  について展開したとき, 最低次の係数  $G_{z,0}$  は,

$$G_{x,0} = K_x^2 + g_0, \quad G_{y,0} = -g_0,$$

と, 設計エネルギー粒子のベータトロロン振動を表わす. 一次は, よく知られている通り

$$G_{x,1} = -K_x^2 (1 - K_x \eta_1) - g_0 + g_1 \eta_1 - (K_x \eta_1)' + \frac{1}{2} (K_x \eta_1)'' , \quad (21)$$

$$G_{y,1} = g_0 - g_1 \eta_1 + \frac{1}{2} (K_x \eta_1)'' \quad (22)$$

であるが, 付加的な項 ( $K_x \eta_1$  を含む項) が現れることに注意しよう. 通常この項は小さな影響しか与えないので見落とされている. この項が現れることは[8]でも指摘されているが, 相対論的ハミルトニアンから出発すると自然に導出される. 次に二次は, 少し長くなるが

$$G_{x,2} = K_x^2 (1 - K_x \eta_1 + K_x \eta_2) + g_0 + g_1 (\eta_2 - \eta_1) + \left( \frac{5}{4} K_x^2 + \frac{3}{2} g_0 \right) \eta_1'^2 - (K_x \eta_2' - K_x^2 \eta_1 \eta_1')' + \frac{1}{2} \left( K_x \eta_2 - \frac{1}{2} K_x^2 \eta_1^2 + \frac{3}{2} \eta_1'^2 \right)'' , \quad (23)$$

$$G_{y,2} = -g_0 - g_1 (\eta_2 - \eta_1) - \left( \frac{1}{4} K_x^2 + \frac{1}{2} g_0 \right) \eta_1'^2 + \frac{1}{2} \left( K_x \eta_2 - \frac{1}{2} K_x^2 \eta_1^2 + \frac{1}{2} \eta_1'^2 \right)'' \quad (24)$$

となる. このオーダーでは, ディスパーションの傾き  $\eta'$  の自乗に比例する項が現れる. これは, ハミルトニアンで根号を残したことにより現れる. この項も通常は無視されている. 三次の具体的な表式は[4]に与えられている. 運動量のずれ  $\delta$  に対する収束力  $G_z$  の変分が求まったので, 以下でクロマチシティの摂動公式を求めよう.

Hill 方程式(19)に従う運動は, 移送行列を用いて記述できる. 二点  $s_0, s_1$  を結ぶ移送行列は Twiss パラメーター[6]によって

$$\mathbf{M}(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}} (\cos \psi_{10} + \alpha_0 \sin \psi_{10}) & \sqrt{\beta_1 \beta_0} \sin \psi_{10} \\ -\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\sqrt{\beta_1 \beta_0}} \cos \psi_{10} - \frac{1 + \alpha_1 \alpha_0}{\sqrt{\beta_1 \beta_0}} \sin \psi_{10} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}} (\cos \psi_{10} - \alpha_1 \sin \psi_{10}) \end{pmatrix} \quad (25)$$

と表すことができ、この間の運動は

$$\begin{pmatrix} z(s_1) \\ \dot{p}_z(s_1) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s_1|s_0) \begin{pmatrix} z(s_0) \\ \dot{p}_z(s_0) \end{pmatrix} \quad (26)$$

と表される．式(25)において、 $\alpha_i$  ( $\equiv \alpha(s_i)$ ；以下同じ)、 $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  は、点  $s_i$  での Twiss パラメーターを略記したもので、 $\psi_{10}$  は二点  $s_1, s_0$  間の位相進度で

$$\psi_{10} = \psi(s_1, s_0) = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (27)$$

と定義されている．ただし、簡単のため方向を表す添字  $x, y$  は省略した．リング一周 ( $s_1 = s_0 + L$ ) の移送行列は Twiss パラメーターの周期性を利用して簡単にすることができる：

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s_0+L|s_0) \\ = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s_0) \sin \mu & \beta(s_0) \sin \mu \\ -\gamma(s_0) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s_0) \sin \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 $\mu$  はリング一周の位相進度

$$\mu = \int_{s_0}^{s_0+L} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (29)$$

で、移送行列で表すと

$$\cos \mu = \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{M}(s_0+L|s_0). \quad (30)$$

上式(30)の両辺を運動量のずれ  $\delta$  で展開することにより、 $\mu$  の高次係数であるクロマティシティが求められる．

$$\mu = \sum_{n=0} \delta^n \mu_n, \quad (31)$$

$$\mathbf{M}(s_0+L|s_0) = \sum_{n=0} \delta^n \mathbf{M}_n(s_0+L|s_0) \quad (32)$$

としたとき、

$$\cos \mu_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{M}_0(s_0+L|s_0), \quad (33)$$

$$-\mu_1 \sin \mu_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{M}_1(s_0+L|s_0), \quad (34)$$

$$-\mu_2 \sin \mu_0 - \frac{1}{2} \mu_1^2 \cos \mu_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{M}_2(s_0+L|s_0). \quad (35)$$

移送行列  $\mathbf{M}(s_1|s_0)$  の運動量のずれ  $\delta$  に関する展開行列を求めるために、運動方程式(19)の逐次積分を

利用する．二点  $s_1, s_0$  間を微小区間に分割し、各区分毎に運動方程式(19)を逐次積分してやれば、

$$\mathbf{M}(s_1|s_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{m-1} [\mathbf{I} + (t_{i+1} - t_i) \mathbf{T}(t_i)] \quad (36)$$

を得る．ここで、 $\mathbf{I}$  は二行二列の単位行列、 $t_k = s_0 + [(s_1 - s_0)/m]k$  である．

$$\mathbf{T}(s) = \sum_{n=0} \delta^n \mathbf{T}_n(s), \quad (37)$$

と展開したとき、最低次

$$\mathbf{M}_0(s_1|s_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{m-1} [\mathbf{I} + (t_{k+1} - t_k) \mathbf{T}_0(t_k)] \quad (38)$$

は、線形光学の移送行列を与える．例えば、線形要素の基本となる厚さ  $l (= s_1 - s_0)$ 、強さ  $g_0$  ( $=$  定数  $> 0$ ) の四極磁石の場合、

$$\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

だから、この区間の移送行列は

$$\mathbf{M}_0(s_1|s_0) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g_0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

となる．ここで、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g_0 & 0 \end{pmatrix}^k \\ & = \begin{cases} (-g_0)^m \mathbf{I} & \text{for } k=2m \\ (-g_0)^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g_0 & 0 \end{pmatrix} & \text{for } k=2m+1 \end{cases} \end{aligned}$$

を用いると、四極電磁石の移送行列

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(s_1|s_0) \\ = \cos(\sqrt{g_0}l) \mathbf{I} + \sin(\sqrt{g_0}l) \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{g_0} \\ -\sqrt{g_0} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が求まる．

運動量のずれ  $\delta$  の一次の項を集めると、線形クロマティシティ  $\xi_1 = \mu_1/(2\pi)$  の表式が得られる．実際これを行うと、次の積分表示

$$\begin{aligned} \text{Tr} \mathbf{M}_1(s_0+L|s_0) \\ = \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \text{Tr} [\mathbf{M}_0(s_1+L|s_1) \mathbf{T}_1(s_1)] \end{aligned} \quad (40)$$

が得られる．零次の移送行列(28)および一次インパクト(19)を代入すると、式(40)は

$$\text{Tr}\mathbf{M}_1(s_0+L|s_0) = -\sin\mu_0 \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_1(s_1)$$

$$\xi_{x1} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 [-\beta_{0x}(K_x^2 + g_0 - g_1 \eta_1) - 2\alpha_{0x} K_x \eta_1' + \gamma_{0x} K_x \eta_1] \quad (42)$$

と変形され、式(34)と比較すると位相進度の一次公式

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_1(s_1) \quad (41)$$

が得られる。水平の場合、 $G_1$ の具体的な表示(21)を代入すると、よく知られた線形クロマティシティの積分公式

が導かれる。ただし、ここで Twiss パラメーターの添字 0 は線形光学のものであることを表している。さて文献[8]でも指摘されている通り、曲率  $K_x$  とデイスパージョン  $\eta_0$  の積を含む項が現れることを注意する。通常、この項は小さく無視されている。

二次位相行列のトレース  $\text{Tr}\mathbf{M}_2(s_0+L|s_0)$  は、二次インパクト  $\mathbf{T}_2$  と一次インパクト  $\mathbf{T}_1$  の積からなる積分表示

$$\int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \text{Tr}[\mathbf{M}_0(s_1+L|s_1) \mathbf{T}_2(s_1)] + \int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \text{Tr}[\mathbf{M}_0(s_1+L|s_2) \mathbf{T}_1(s_2) \mathbf{M}_0(s_2|s_1) \mathbf{T}_1(s_1)] \quad (43)$$

で表される。二次インパクトの積分は、一次の積分で  $G_1$  を  $G_2$  で置き換えてやればよい。一次インパクト自乗の項は、位相行列(25)を代入すると

$$\begin{aligned} & \int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \text{Tr}[\mathbf{M}_0(s_1+L|s_2) \mathbf{T}_1(s_2) \mathbf{M}_0(s_2|s_1) \mathbf{T}_1(s_1)] \\ &= \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \{ \cos[\mu_0 - 2\psi(s_2, s_1)] - \cos\mu_0 \} \beta_0(s_2) G_1(s_2) \beta_0(s_1) G_1(s_1). \end{aligned}$$

上式で  $\cos\mu_0$  の項は、

$$\int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \beta_0(s_2) G_1(s_2) \beta_0(s_1) G_1(s_1) = \frac{1}{2} \left[ \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_1(s_1) \right]^2$$

より、一次位相進度の表式(41)を考慮すると、展開(35)の  $-(1/2)\mu_1^2 \cos\mu_0$  の項と相殺する。残った積分から二次位相進度  $\mu_2$  を求めるためには、 $\sin\mu_0$  を括り出さなければならない。これは、以下に示すように  $\beta_0(s) G_1(s)$  をフーリエ変換することによって実行できる。変数を軌道長  $s_1$  から位相進度

$$\varphi_1 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\beta_0(s)} \quad (44)$$

へ移ると、

$$\begin{aligned} & \int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \cos[\mu_0 - 2\psi(s_1, s_2)] \beta_0(s_2) G_1(s_2) \beta_0(s_1) G_1(s_1) \\ &= \int_0^{\mu_0} d\varphi_2 \int_0^{\varphi_2} d\varphi_1 \cos(\mu_0 - 2\varphi_2 + 2\varphi_1) \beta_0^2(\varphi_2) G_1(\varphi_2) \beta_0^2(\varphi_1) G_1(\varphi_1) \end{aligned} \quad (45)$$

であるが、 $\beta_0^2(\varphi) G_1(\varphi)$  は周期  $\mu_0$  を持つので

$$\beta_0^2(\varphi) G_1(\varphi) = \frac{1}{2} \alpha_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_1(n) \cos\left(\frac{2\pi n}{\mu_0} \varphi\right) + b_1(n) \sin\left(\frac{2\pi n}{\mu_0} \varphi\right) \right] \quad (46)$$

なるフーリエ変換を考える。ここで、フーリエ係数  $a_1(n)$ ,  $b_1(n)$  は

$$\begin{cases} \alpha_1(n) \\ b_1(n) \end{cases} \equiv \frac{2}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} d\varphi \begin{cases} \cos(2\pi n\varphi/\mu_0) \\ \sin(2\pi n\varphi/\mu_0) \end{cases} \beta_0^2(\varphi) G_1(\varphi) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (47)$$

である。ただし、波括弧中の  $a_1, b_1$  と  $\cos, \sin$  は同順とする。積分変数を位相進度  $\varphi$  から軌道長  $s$  に戻すと

$$\begin{cases} \alpha_1(n) \\ b_1(n) \end{cases} = \frac{2}{\mu_0} \int_{s_0}^{s_0+L} ds \begin{cases} \cos[2\pi n\varphi(s)/\mu_0] \\ \sin[2\pi n\varphi(s)/\mu_0] \end{cases} \beta_0(s) G_1(s) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (48)$$

である。このフーリエ展開(46)を積分(45)に代入すれば

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu_0} d\varphi_2 \int_0^{\varphi_2} d\varphi_1 \cos(\mu_0 - 2\varphi_2 + 2\varphi_1) \beta_0^2(\varphi_2) G_1(\varphi_2) \beta_0^2(\varphi_1) G_1(\varphi_1) \\ &= \sin \mu_0 \left[ \frac{1}{8} \mu_0 a_1^2(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0^3}{4(\mu_0^2 - \pi^2 n^2)} \{a_1^2(n) + b_1^2(n)\} \right] \end{aligned}$$

と、 $\sin \mu_0$  が括り出せる。結局、2次のクロマティシティ  $\xi_2 \equiv \mu_2/(2\pi)$  は、フーリエ係数を用いて

$$\xi_2 = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_2(s_1) - \frac{1}{16} \mu_0 a_1^2(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0^3}{8(\mu_0^2 - \pi^2 n^2)} \{a_1^2(n) + b_1^2(n)\} \right] \quad (49)$$

と表される。注目すべきは、二次クロマティシティの表式には二次インパクトと一次インパクトの自乗が現れることである。三次クロマティシティも、計算は長くなるが同様に求めることができる<sup>4)</sup>。

SPring-8 蓄積リングの計算例を図2に示す。設計ベータトロンチューンは(40.15, 18.35)、線形クロマティシティは(7.2, 6.4)の設定である。黒(白抜き)丸印は、エネルギーを変えながら測定された水平(垂直)ベータトロンチューンを表す。点線は一次、破線は二次、実線は三次までの摂動計算の結果である。三次まででかなり良くベータトロンチューンの振る舞いが近似できていることが分かる。数値計算において、六極電磁石の厚みを考慮する必要があることを強調しておく。これは、フーリエ級数の総和の収束に

重要な役割を果たす<sup>4)</sup>。というのは、フーリエ級数成分は高調波数が高くなるほど振動することになり、磁石長にわたる積分が相殺して寄与しなくなるからである。SPring-8 蓄積リングの計算例では、約一万の高調波まで和を取るとフーリエ級数がほぼ収束することが確認された。

#### 4. ベータトロン関数のエネルギー収差

最後に、ベータトロン関数のエネルギー収差の表式について議論する。一次のベータトロン関数のエネルギー収差は、収束力のずれとして簡単に導くことができるが<sup>7)</sup>、二次公式導出の準備としてここでの形式で求めてみる。

ベータトロン関数を運動量のずれ  $\delta$  に関して

$$\beta(s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \beta_n(s_0)$$

と位相進度と同じように展開すると、移送行列(28)の(1, 2)成分の  $\delta$  について一次の項は

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_1(s_0+L|s_0)|_{12} \\ &= \beta_1(s_0) \sin \mu_0 + \beta_0(s_0) \mu_1 \cos \mu_0 \end{aligned} \quad (50)$$

となる。一方、移送行列の展開式(36)から一次インパクト  $\mathbf{T}_1$  を拾い集めて一次の移送行列を求めると

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_1(s_0+L|s_0) \\ &= \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \mathbf{M}_0(s_0+L|s_1) \mathbf{T}_1(s_1) \mathbf{M}_0(s_1|s_0) \end{aligned}$$

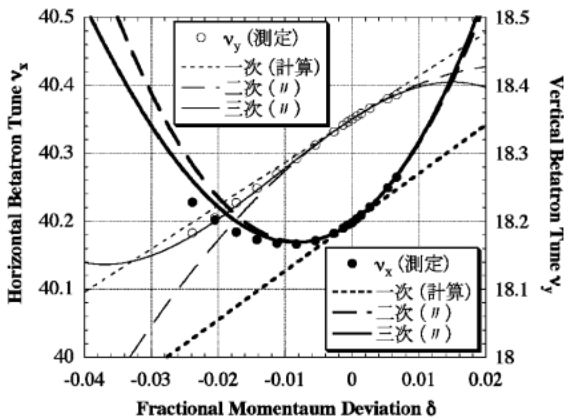


図2 SPring-8 蓄積リングのベータトロン振動数。

であるから、0 次移送行列の Twiss パラメーターによる表示(25) および一次インパクト  $\mathbf{T}_1$  の具体的な表式を代入すると

$$\mathbf{M}_1(s_0+L|s_0)|_{12} = -\frac{\beta_0(s_0)}{2} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_1(s_1) \{ \cos [\mu_0 - 2\varphi(s_1) + 2\varphi(s_0)] - \cos \mu_0 \}. \quad (51)$$

二つの表式(50)と(51)を比較し、一次位相進度(41)を考慮すると、ベータatron関数の一次エネルギー収差の表式

$$\beta_1(s_0) = -\frac{\beta_0(s_0)}{2 \sin \mu_0} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_1(s_1) \cos [\mu_0 - 2\varphi(s_1) + 2\varphi(s_0)] \quad (52)$$

を得る. 一周の位相進度  $\mu$  とベータatron関数  $\beta$  の間には関係(29)があるが、一次では

$$\mu_1 = -\int_0^L ds_0 \frac{\beta_1(s_0)}{\beta_0^2(s_0)} \quad (53)$$

が成り立つ. 実際これを満たしていることは、上式に  $\beta_1$  の表式(52)を代入してやれば、一次位相進度表式(41)に帰着することから確認できる. また、 $\beta_0 G_1$  のフーリエ級数を用いて  $\beta_1$  を表すと

$$\begin{aligned} \beta_1(s_0) = & -\frac{\beta_0(s_0)}{4} \left[ a_1(0) \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_0^2}{\mu_0^2 - \pi^2 n^2} \left\{ a_1(n) \cos \frac{2\pi n \varphi_0(s_0)}{\mu_0} + b_1(n) \sin \frac{2\pi n \varphi_0(s_0)}{\mu_0} \right\} \right] \end{aligned} \quad (54)$$

となる. これを代入することによっても、関係(53)が成立することが確かめられる. フーリエ係数はクロマティシティを計算するときにも得られているので、ベータatron関数のエネルギー収差は容易に求められる.

二次移送行列  $\text{Tr} \mathbf{M}_2(s_0+L|s_0)$  の (1, 2) 成分は、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2(s_0+L|s_0)|_{12} = & \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \mathbf{M}_0(s_0+L|s_1) \mathbf{T}_2(s_1) \mathbf{M}_0(s_1|s_0)|_{12} \\ & + \int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \mathbf{M}_0(s_0+L|s_2) \mathbf{T}_1(s_2) \mathbf{M}_0(s_2|s_1) \mathbf{T}_1(s_1) \mathbf{M}_0(s_1|s_0)|_{12} \end{aligned} \quad (55)$$

と一次と二次のインパクトによって与えられ、具体的には

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2(s_0+L|s_0)|_{12} = & -\frac{\beta_0(s_0)}{2} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_2(s_1) \{ \cos [\mu_0 - 2\varphi(s_1) + 2\varphi(s_0)] - \cos \mu_0 \} \\ & -\frac{\beta_0(s_0)}{4} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \beta_0(s_2) G_1(s_2) \beta_0(s_1) G_1(s_1) \\ & \times \{ \sin [\mu_0 - 2\varphi(s_2) + 2\varphi(s_0)] - \sin [\mu_0 - 2\varphi(s_2) + 2\varphi(s_1)] - \sin [\mu_0 - 2\varphi(s_1) + 2\varphi(s_0)] + \sin \mu_0 \} \end{aligned} \quad (56)$$

となる. 一方、移送行列の Twiss パラメーターによる表示(28)からは、

$$\mathbf{M}_2(s_0+L|s_0)|_{12} = \beta_2(s_0) \sin \mu_0 + \beta_1(s_0) \mu_1 \cos \mu_0 + \beta_0(s_0) \left( \mu_2 \cos \mu_0 - \frac{1}{2} \mu_1^2 \sin \mu_0 \right) \quad (57)$$

が得られる. 上の両式を比較して、一次、二次の位相進度  $\mu_1, \mu_2$  およびベータatron関数の一次エネルギー収差  $\beta_1$  の表式を代入すれば、ベータatron関数の二次エネルギー収差

$$\beta_2(s_0) = -\frac{\beta_0(s_0)}{2 \sin \mu_0} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_1 \beta_0(s_1) G_2(s_1) \cos [\mu_0 - 2\varphi(s_1) + 2\varphi(s_0)]$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\beta_0(s_0)}{4 \sin^2 \mu_0} \int_{s_0}^{s_0+L} ds_2 \int_{s_0}^{s_2} ds_1 \beta_0(s_2) G_1(s_2) \beta_0(s_1) G_1(s_1) \\
 & \times \{ \cos 2[\mu_0 - \varphi(s_2) + \varphi(s_0)] + \cos 2[\varphi(s_2) - \varphi(s_1)] + \cos 2[\varphi(s_1) - \varphi(s_0)] \}
 \end{aligned} \tag{58}$$

が得られる。二次のオーダーの位相進度とベータトロン関数のエネルギー収差の関係は

$$\mu_2 = - \int_0^L \frac{ds_0}{\beta_0(s_0)} \left[ \frac{\beta_2(s_0)}{\beta_0(s_0)} - \left\{ \frac{\beta_1(s_0)}{\beta_0(s_0)} \right\}^2 \right] \tag{59}$$

であるが、長い計算により成り立っていることが確認できる。

$\beta_0 G_2$  および  $\beta_0 G_1$  のフーリエ展開を用いると、ベータトロン関数の二次エネルギー収差は

$$\begin{aligned}
 \beta_2(s_0) = & - \frac{\beta_0(s_0)}{4} \left[ a_2(0) - \frac{3}{8} a_1^2(0) - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0^2 (3\mu_0^2 - \pi^2 n^2)}{(\mu_0^2 - \pi^2 n^2)^2} \{ a_1^2(n) + b_1^2(n) \} \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C(n) \cos \frac{2\pi n \varphi_0(s_0)}{\mu_0} + S(n) \sin \frac{2\pi n \varphi_0(s_0)}{\mu_0} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{60}$$

と表すことができる。ここで、振動項  $\cos$ ,  $\sin$  の係数  $C(n)$ ,  $S(n)$  は

$$\begin{aligned}
 C(n) = & \frac{2\mu_0^2 a_2(n)}{\mu_0^2 - \pi^2 n^2} - \sum_{m=0}^n \frac{\mu_0^4 [3\mu_0^2 - \pi^2 (m^2 - mn + n^2)] [a_1(m) a_1(m-n) + b_1(m) b_1(m-n)]}{4(\mu_0^2 - \pi^2 m^2)(\mu_0^2 - \pi^2 n^2)[\mu_0^2 - \pi^2 (m-n)^2]} \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_0^4 [3\mu_0^2 - \pi^2 (m^2 + mn + n^2)] [a_1(m) a_1(m+n) + b_1(m) b_1(m+n)]}{2(\mu_0^2 - \pi^2 m^2)(\mu_0^2 - \pi^2 n^2)[\mu_0^2 - \pi^2 (m+n)^2]},
 \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
 S(n) = & \frac{2\mu_0^2 b_2(n)}{\mu_0^2 - \pi^2 n^2} - \sum_{m=0}^n \frac{\mu_0^4 [3\mu_0^2 - \pi^2 (m^2 - mn + n^2)] [a_1(m) b_1(m-n) + b_1(m) a_1(m-n)]}{4(\mu_0^2 - \pi^2 m^2)(\mu_0^2 - \pi^2 n^2)[\mu_0^2 - \pi^2 (m-n)^2]} \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_0^4 [3\mu_0^2 - \pi^2 (m^2 + mn + n^2)] [a_1(m) b_1(m+n) - b_1(m) a_1(m+n)]}{2(\mu_0^2 - \pi^2 m^2)(\mu_0^2 - \pi^2 n^2)[\mu_0^2 - \pi^2 (m+n)^2]}
 \end{aligned} \tag{62}$$

である。フーリエ展開による表式を用いれば振動成分は一周積分によって 0 になるので、二次のオーダーの位相進度とベータトロン関数のエネルギー収差の関係(59)は容易に確かめられる。またここでもフーリエ係数は既に計算されているので、容易にベータトロン関数の二次エネルギー収差は求められる。

## 5. まとめ

円形加速器に対して相対論的ハミルトニアンから出発して、非線形ディスパージョンおよびクロマティシティの表式を導出した。まず、相対論的ハミルトニアンから導かれる運動量のずれた粒子に対する運動方程式を摂動的に解くことにより、ディスパージョンの満たす再帰的な方程式を書き下した。これを順次積分することにより高次ディスパージョンが計算できる。この表式を SPring-8 蓄積リングに適用し、実機による測定との比較から、その正当性は確認された。四次のオーダーでも大変良い一致を示していたことは注目に値する。これは、SPring-8 蓄積リングの高精度な電磁石アライメントと優秀な COD 補正の結果と思われる。

る。SPring-8 蓄積リングでは、エラー磁場の生じにくいあるいはあっても影響が少なくなるように、架台を用いた二段階アライメントを採用した<sup>9)</sup>。電磁石を共通架台に設置し、架台内アライメントはより精密に行い、架台毎に電磁石を一体として扱えるようにして、エラー磁場を出にくくしている。COD 補正に関しては、ビームに基づいてビーム位置モニターのオフセットを評価する手法を開発し<sup>10)</sup>、これを用いて COD 補正を行うことによってエラー磁場が出ないようにしている。また、ディスパージョンのゆがみを補正するような COD 補正も実施している。加えて、線形ディスパージョンがデザインに近づくよう四極磁場調整も行っている。このような努力の結果として、高次ディスパージョンも計算に近いものになっているのではないかと推測される。

非線形ディスパージョンが分かると、これを用いてクロマティシティが求められる。ディスパージョンと同じくハミルトン形式で定式化を行い、高次クロマティシティの摂動計算を実践した。高次クロマティシティの表式導出において、リングの周期に関するフーリ

エ変換が有効に働くことが分かった。その数値計算を行う際には、多極電磁石の厚みがフーリエ級数の収束に重要な役割を果たしていた。SPRING-8 蓄積リングの場合、ベータatronチェーンは三次まで考慮すると実測とかなり良い一致を示していた。これは言うまでもなく、ディスパーションが正確に求められていた結果である。

最後に、本稿で紹介した研究を共同で行った田中均、早乙女光一、清水純各氏に感謝致します。

## 参 考 文 献

- 1) K. Soutome, M. Takao and H. Tanaka, in *Proceedings of 6th European Particle Accelerator Conference*, Stockholm, 1998, edited by S. Meyers, L. Liljeby, Ch. Petit-Jean-Genaz, J. Poole, and K.-G. Rensfelt (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1999), p. 924.
- 2) H. Tanaka, et al., *Nucl. Instrum. Methods A* **431** (1999), 396.
- 3) M. Takao, et al., in *Proceedings of 7th European Particle Accelerator Conference*, Viena, 2000, edited by J.-L. Laclare, W. Mitaroff, Ch. Petit-Jean-Genaz, J. Poole, and M. Regler (CERN, Geneva, 2000), p. 1083.
- 4) M. Takao, et al., *Phys. Rev. E* **70**, 016501 (2004).
- 5) M. Takao, et al., in *Proceedings of the 2001 Particle Accelerator Conference*, Chicago, 2001, edited by P. Lucas and S. Webber, (IEEE Operations Center, Piscataway, 2001), p. 1764.
- 6) E. D. Courant and H. S. Snyder, “*Theory of the Alternating Gradient Synchrotron*”, *Ann. Phys.* **3** (1958), 1.
- 7) M. Sands, *The Physics of Electron Storage Rings. An Introduction.*, in *Proceedings of International School of Physics Enrico Fermi Course 46*, Physics with Intersecting Storage Ring, edited by B. Touschek (Academic Press, San Diego), 257 (1971).
- 8) F. Willeke and G. Ripken, “*Methods of Beam Optics*”, in *Physics of Particle Accelerators*, AIP Conf. Proc. 184, 758 (America Institute of Physics, New York 1989).
- 9) H. Tanaka, et al., *N.I.M.* **A313** (1992), 529.
- 10) K. Soutome, et al., *N.I.M.* **A459** (2001), 66.