解　説

シンクロトロン振動のシンプレクティックな軌道理論

鈴木 敏郎*

Symplectic Orbit Theory of Synchrotron Oscillations

Toshio SUZUKI*

Abstract

We stress in this review paper that we should describe synchrotron oscillations using the length *s* of the central design orbit as an independent variable. A symplectic theory in this case is already available and we can incorporate important nonlinear features into the theory that are lost if we use the time *t* as the independent variable. We also settle the arguments about a closely related problem of the effects of betatron acceleration on synchrotron oscillations; the betatron acceleration affects not only the energy, but also the phase (arrival time) of the particles. When the equations for these two quantities are combined to form a second-order phase equation, the effects are cancelled in the adiabatic approximation.

1. はじめに

シンクロトロン振動は，しばしば時間 t を独立変数として記述されているが（以下 t–記述と呼ぶ），この解説論文では中心設計軌道の長さ s を独立変数とすべきだという事を述べる（以下 s–記述と呼ぶ）．表題の軌道理論とは s–記述の理論という意味である．これと密接に関連した問題であるベータトロン加速のシンクロトロン振動に対する効果についての議論に決着をつける．更に，rf 加速について t–記述では進行波 rf 近似で説明しなければならないが，s–記述によれば定在波 rf 加速を近似なしに扱える事を述べる．これらの問題は互いに密接に関連した非線形力学の問題だが，これらを統一的にきちんと説明した教科書はなく，間違った記述も散見されるので，ここできちんと議論しておきたい．

筆者は以前ハミルトニアン形式でのシンクロトロン振動とシンクロベータトロン結合の理論を s–記述で作った[1]．そこで見出された事は，第３章で示すように，s–記述ではエネルギーについての方程式だけでなく位相（粒子の到着時間）の方程式にも磁束密度 B の時間微分 $\dot{B}$ を含む項（ベータトロン加速を表す項）が入り，両者相まってシンクロトロン振動の方程式がシンプレクティックになるという事である．この重要な点が今まで見落とされていたと考えられる．このように式はやや複雑になるが，これら２つの方程式を組み合わせ位相（到着時間）に関する２階の差分や微分方程式を作ると，$\dot{B}$ を含む項はこれの２次以上を無視する断熱近似の範囲で相殺され式が簡単になる事が分かった[2]．

この事実はシンクロトロンの発明者の Veksler[3] や McMillan[4] によって垂直方向の収束のない偏向電磁石を用いたシンクロトロンについて既に示されたもので，Veksler は少し式の導出も書いている．もちろん彼らは s–記述を用いている．Veksler の論文の英訳は論文集[5] に載っている．本稿はこれらの論文を再発掘し強収束シンクロトロンでのシンクロトロン振動について現代的視点で述べようとするものである．

このように，s–記述でシンクロトロン振動は完全に記述できるが，歴史的に t–記述が多く用いられた．これはエネルギー，到着時間両方についての方程式で $\dot{B}$ を含む項が消え，式が綺麗になる事，更に進行波 rf 近似をする事によりハミルトニア

* 高エネルギー加速器研究機構　KEK, High Energy Accelerator Research Organization
（E-mail: yt-suzuki@r4.dion.ne.jp）

ンが独立変数 t に依存しなくなり，積分によって解が求まる可積分系となるからである．そのおかげで位相安定性の条件として rf bucket（セパラトリックス）の概念が確立した．しかし rf bucket の概念は，シンクロトロンチューンが小さい時にしか成り立たず，カオスが現れる場合もある事が standard mapping と呼ばれる数値的解析で分かってきた [6]．これは s–記述に基づき定在波 rf 加速を考えないと理解できない．この例のように t–記述は特にストーレッジリングの場合に不適切である．

また t–記述では $\dot{B}$ を含む項が消えるので，s–記述でもそのような項は現れないという誤った議論もある．この例の一つが Edwards と Syphers による教科書 [7] である．この本の中で述べられているシンクロトロン振動の説明はほとんど全て誤りである．Handbook [8] に載っている彼らの s–記述の式も間違いである．これらは本稿を読んでいただければすぐに分かる事である．

そこで次の第 2 章で s–記述の利点及び t–記述の欠点を簡単にまとめてみる．第 3 章で数式を少し用いて具体的な説明をする．最後にまとめを書く．

2. s–記述の長所と t–記述の欠点

そもそも加速器内の電磁石や rf 空洞はシンクロトロンの中心軌道の一定の場所に置かれていて，粒子はこれらの装置の内部にいる時だけ力を受ける．従って運動を，s を独立変数として記述する事は理にかなっている．ベータトロン振動について s–記述が用いられているのはこの点からである．

軌道長 s を独立変数とすると負符号を付けたエネルギーのずれ $-\Delta E$ と平衡粒子に対しての到着時間の遅れ τ が正準（従属）変数となるが，これも物理的状況を良く反映している．ここで，τ は s と共に連続的に変化するので微分方程式で表されるが，エネルギーは rf 空洞の点で突然変わり，その後弱いベータトロン加速で少しずつ連続的に変化する．そこで ΔE については一周の周期を持つ周期的デルタ関数を含む微分方程式で自然な形で表される．もし t を独立変数とすると (s, P_s) が正準共役量になる．ここで P_s は s–方向の正準（角）運動量を示す．物理的に正しい s–記述から t–記述に変えようとすると，s はデルタ関数の中に入っているので，デルタ関数をフーリエ級数に展開して s をデルタ関数の外に出して扱う．そして連続的に加速を行う一つのハーモニックだけを残す．これがよく知られた進行波近似である．これは摂動論の考え方で平均法と呼ばれるものの 1 次近似と同じである．しかし他のハーモニックスは短時間の間はその効果が小さいとはいえ長時間たつと大きな効果となり運動が stochastic とか chaotic になる事がある．この事が standard mapping で明らかにされたのである．この mapping の為にはデルタ関数を含む微分方程式を差分方程式に変える必要がある．これは加速のないストーレッジリングの場合は自明であるが，加速のあるシンクロトロンについては文献 2）で述べた．

これは計算機を用いた数値的解析であるが，純解析的方法には差分方程式を微分方程式で近似するのが適当である．こうすると，t–記述で述べた進行波近似と同様なものになる．しかし，小振幅シンクロトロン振動を考え線形近似した場合でも，この近似的微分方程式から求めたシンクロトロンチューン ν_{so} と，差分方程式（行列計算で同様の事ができる）から求めたチューン ν は一般に異なり，一個の rf 空洞の場合 ν_{so} が $1/\pi$ より大きくなると ν が虚数となり振動が不安定になる事が Piwinski [9] によって示された（彼はベータトロン加速を無視しているが最終結果は断熱近似の範囲で変わらない）．

また多次元の問題の場合，独立変数を s と t と両方使うのは適切でない事はすぐ分かるだろう．これはシンクロベータトロン共鳴の場合等である．更にデルタ関数が入る場合，ベータトロン振動数の整数部分が無視でき低次の共鳴が起こり易くなる事も分かる．また，多粒子系の研究に用いられる Vlasov 方程式を考える．単一粒子のベータトロン振動もシンクロトロン振動も両方とも s で記述されるのだから Vlasov 方程式も s を独立変数に取るべきである．しかし，これについての代表的理論を作った Sacherer は，シンクロトロン振動は t–記述によるべしという迷信が支配していた時代に理論を発展させたので t を独立変数に取っていた．これを s–記述に直したのは主に Chao である．この点については私の古い講義録 [10]

か Chao の教科書[11]を参照されたい．なお，現在では多くのビームダイナミックスの問題はストーレッジリングの条件で解析するのが一般的でベータトロン加速の問題はなくなる．

それでは t による微分と s による微分とはどのように異なるのだろうか？　これには dt/ds を計算すれば良い．これは簡単な幾何学の問題である．一般形は

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{v}\sqrt{\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2+x'^2+z'^2} \tag{1}$$

となるが，線形近似では

$$\frac{dt}{ds}\cong\frac{1}{v}\left(1+\frac{x}{\rho}\right) \tag{2}$$

となる．これは同心円を考えればすぐに分かる．ここで ρ は中心軌道の曲率半径，v は速度，x，z はそれぞれ水平，垂直方向の座標でプライムは s についての微分を表す．このように t–記述と s–記述の違いは rf 加速が正弦的だという事とはまた別の非線型性の違いである．言い換えると t–記述は自然な s–記述が持っている非線型性を無視した記述だと言える．

更に，連続的電波で粒子が加速され，rf bucket が安定限界だとする進行波近似では電子ストーレッジリングの quantum lifetime は理解できない．これも s–記述によれば簡単に理解できる．

3. 式を用いた説明

t–記述も加速のある場合の s–記述もまず解析力学の正準理論を用いて解析された．ここではベータトロン加速の効果に問題を絞って要点だけを述べる．詳しくは原論文 1, 12）を参照されたい．

Bohm と Foldy[12]は位相安定性の原理が見つかって間もなく t–記述の理論を，ラグランジアン形式を用いて作った．よく知られた円柱座標でのラグランジアンから正準運動量 P_s は

$$P_s=rp_s+erA_s \tag{3}$$

と書かれる．これは角運動量に対応している事を注意しておく．ここで r は動径ベクトルの長さ，p_s は（力学的）運動量，e は（符号を付けた）電荷，A_s はベクトルポテンシャルである．添え字 s は s 方向（同じ事だが方位角 θ 方向）の量を表す．ここで $ds=\rho d\theta$ の微分関係がある．さて $r=\rho+x$ と置く．更に平衡粒子の運動量を p_0 とし $p_s=p_0+\Delta p_s$ と置く．ここでは磁束密度 B の時間微分 $\dot{B}$ の効果だけを議論するのだから電磁石によるベクトルポテンシャルだけを考えれば良く，x の 1 次まで取ると $rA_s=\rho A_0+\rho Bx$ となる．ここで中心軌道上のポテンシャル A_0 は中心軌道が囲む磁束を 2π で割ったものである．すると x，Δp の 1 次まで取って

$$P_s=\rho p_0+e\rho A_0+(p_0+eB\rho)x+\rho\Delta p_s \tag{4}$$

となる．ここで $p_0=-eB\rho$ の関係から B を含む項，従って $\dot{B}$ を含む項は運動方程式から消去される事が簡単に分かる．

一方，s–記述でのシンプレクティックな理論は筆者が文献 1）で始めた．その要点は簡単である．s–記述では $-P_s$ がハミルトニアンになり（t，$-E$）が正準共役量になる事は加速器物理では周知の事である．例えば Courant と Snyder の論文[13]の Appendix に載っている．しかし彼らの扱いは直交座標系でのハミルトニアンから出発しているのが欠点で，ここで示したようにラグランジアンの段階で曲線座標系に変換する方が適切である．さて，t–記述では時間 t はパラメーターであるが s–記述では正準変数となる．平衡粒子の量に添字 0 を付けて $t=t_0+\tau$，$E=E_0+\Delta E$ と置くと（τ，$-\Delta E$）が正準変数となる．そこで $B(t)$ を $B(t_0)+\dot{B}(t_0)\tau$ と 1 次まで展開すると（4）式からハミルトニアンに

$$-e\rho\dot{B}\tau x \tag{5}$$

という項が現れる事がすぐ分かる．これがベータトロン加速の効果を表す項である．

これから ΔE に関する方程式を作ると点 s_c での

rf 加速も含め

$$\frac{d\Delta E}{ds}=-e\dot{B}x+eV\delta_p\left(s-s_c\right)(\sin\varphi-\sin\varphi_0) \qquad (6)$$

という式が出る．これは時々お目にかかる式である．これはより直観的方法でも導ける．ここで，粒子は反時計回りの運動をするとして円柱座標的な座標系を用いた．この場合ローレンツ力が向心力になるべきという条件から $e\dot{B}$ は負となる．文献 2）では時計回りの運動を考えているので $e\dot{B}$ の符号が逆になっている．

次に，到着時間の遅れ τ について考える．まず x はよく知られるように

$$x=x_\beta+D\left(\frac{\Delta E}{\beta^2E}-\frac{\Delta B}{B}\right)+x_{co} \qquad (7)$$

という関係式に分解される．ここで D は dispersion function，x_β はベータトロン振動の座標，x_{co} は閉軌道のずれ，β は速度のローレンツ因子，そして ΔB は B の中心値からのずれを表す．さて，ΔE を含む項だけを（5）式のハミルトニアンに代入して τ に関する方程式を作ると $d\tau/ds$ に

$$\frac{e\dot{B}D\tau}{\beta_0^2E_0}=-\frac{D\dot{B}\tau}{v_0B_0\rho} \qquad (8)$$

という項が現れる．ここで $p_0=-eB\rho$ という関係と $ds=\rho\, d\theta$ という微分関係を用いた．τ についての方程式を全部書けば

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{v_0}\left\{\left(\frac{D}{\rho}-\frac{1}{\gamma_0^2}\right)\frac{\Delta E}{\beta_0^2E_0}-\frac{D\dot{B}}{\rho B_0}\tau\right\} \qquad (9)$$

となりエネルギーについての（6）式と相まってシンプレクティックな方程式になるのである．(8) 式に現れる項は文献 2）で述べたように（7）式で $\Delta B=\dot{B}\tau$ と置いた時，τ が正の遅れて来る粒子を考えると磁場は上昇しているのだから一定点で粒子が受ける力は強くなり x が変化し，従って (2) 式から分かるように粒子の到着時間が変化するという効果を表す．一方 t–記述では全ての粒子について一定の時間 t に受ける力を考えるので $\Delta B=0$ となり位相（到着時間）方程式には $\dot{B}$ の項は現れない．

t–記述で $\dot{B}$ 項がエネルギー方程式から消える事は既に述べたが，この事を s–記述の（6）式から t と s との微分関係式 (2) を用いて更に説明する．これは Bryant と Johnsen の教科書[14] に載っているものを分かり易くしたものだが，上記の事がなお一層はっきりするだろう．まず

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta E}{ds}&=\frac{1}{v}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{dE}{dt}-\frac{1}{v_0}\frac{dE_0}{dt}\\&=\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{dp}{dt}-\frac{dp_0}{dt}\\&\cong\frac{d\Delta p}{dt}+\frac{x}{\rho}\frac{dp_0}{dt}\\&=\frac{d\Delta p}{dt}-e\dot{B}x\end{aligned} \qquad (10)$$

となる．ここで２次の項 $x\Delta p$ を無視し，$p_0=-eB\rho$ の関係式を用いた．ここで（10）式を（6）式に入れると

$$\frac{d\Delta p}{dt}=eV\delta_p\left(s-s_c\right)(\sin\varphi-\sin\varphi_0) \qquad (11)$$

となり $\dot{B}$ 項が消去されるのがはっきり分かる．更に p を p_s と近似的に考えると，（11）式は rf 空洞のある直線部での Newton 方程式とも考えられる．そこで（11）式から出発してシンクロトロン振動を説明する本も結構ある．これも文献 7）とはまた違った $\dot{B}$ 項のない t–記述である．しかしシンクロトロンは円形であるから正しい（6）式から（10）式の近似を経て導出せねばならないというのが Bryant と Johnsen の主張である．

即ち$\dot{B}$項を考慮に入れ，また正準運動量は角運動量だという事を押さえなければならない．ここで首尾一貫させるため（11）式の右辺に進行波rf近似をして，$\Delta p = \Delta E/\nu_0$，$\nu_0 = R\omega_0$の関係式を用いると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta E}{\omega_0}\right) \cong \frac{eV}{2\pi}\left\{\sin\left(\varphi_0 + \Delta\varphi\right) - \sin\varphi_0\right\} \qquad (12)$$

となり，よく見慣れたCourantとSnyderの論文に載っている（近似的）方程式となる．

t–記述で$\dot{B}$項がエネルギー方程式から消える事はKolomenskyとLebedevの教科書[15]に既に載っているが，彼らの説明が分かりにくかった為以後も混乱があった．しかしこれらの議論は，シンクロトロン振動は*t*–記述とすべしという誤解に基づいている事に注意すべきである．実際BryantとJohnsenは*t*–記述のラグランジアン–ハミルトニアン理論の解説も別の場所でしている．しかしこの場合はrf bucketが絶対的安定条件となってしまうので，長時間安定性等の議論は*s*–記述によるべしという事を強調しておきたい．

ここで一つ注意したいのは，本稿で述べた方程式では$p_0 = -eB\rho$の関係式が加速のある場合でも常に成り立っているという近似を用いている．Bは時間と共に連続的に変化するのに対しp_0は段階的に変化する．従って上式は厳密には中心軌道上の一点でしか成り立たない．そこで小さな効果だが閉軌道のズレができたりシンクロベータトロン共鳴が起こったりする．従って通常用いられる加速のある場合のベータトロン振動の方程式やdispersion functionを求める方程式も近似的なものである．

最後にrf位相のずれ$\Delta\varphi$について付け加えよう．*t*–記述では

$$\Delta\varphi = h\left(\theta - \theta_0\right) \qquad (13)$$

である[12]．しかし，この位相は位置$\theta(t)$であり，定在波rf加速では理解できない．通常進行波rf電波に粒子が波乗りしていて平衡粒子の位置$\theta_0(t)$の周りを安定に振動している事で位相安定性を説明しているが，これは実際の現象とはかけ離れた説明である．

s–記述では，rf位相は粒子の到着時間での定在波電場の位相であり

$$\Delta\varphi = \omega_{rf}\left(t_0 + \tau\right)\tau = \omega_{rf}\left(t_0\right)\tau + \dot{\omega}_{rf}\left(t_0\right)\tau^2 \qquad (14)$$

と表される．ここでτの2次まで取った．通常$\dot{\omega}_{rf}$は$\dot{B}$に比例し定数と考えて良いのでτの3次以上は考えなくて良い．

なお（7）式のベータトロン振動の項も位相に寄与する．これは等時性を満たすAVFサイクロトロン等でもシンクロトロン振動が起こる事を示す．この位相はサイクロトロンの分野ではCP（Central Position）phaseと呼ばれている．これはまずストーレッジリングについて，dispersionによるシンクロベータトロン共鳴に関連してPiwinskiとWrulich[16]によって見つけられた．次いでCorstenとHagedoorn[17]によって*t*–記述に基づいてはいるがハミルトニアン形式で解析された．この論文ではそれ以前のサイクロトロンについての論文もレヴューされている．これらの仕事の簡単な説明及び*s*–記述での解析については文献1）でしておいた．しかしそこではrf位相とCP位相を逆にして書いてしまったので注意していただきたい．また*t*–記述の痕跡が所々残っている事も注意していただきたい．CP位相はベータトロン振動のシンクロトロン振動への効果であるが，rf空洞のある場所でのdispersion及びその*s*微分をゼロにすると，その効果もゼロになる．この場合，シンクロトロン振動のベータトロン振動への効果もゼロとなる．この事はシンクロベータトロン共鳴をなくす条件としてよく知られている[16]．

4. まとめ

ストーレッジリングの場合は*s*–記述が適切である事は今や常識であろう．加速のある場合でも*s*–記述で十分である事を示した事により*t*–記述はもはや不要だと言って良いだろう．またベータトロン加速の効果についての誤った議論にも決着がついたと思う．さて*s*–記述で$d\theta = \omega dt$と置く．ここでωをω_0と平衡粒子の量に置き換えると，多くの*s*–記述の式が*t*–記述の式と一致する．ωはEやτの関数であるが，ここで述べた*s*–記述が持っ

ている非線形性はこのように簡単に表される．従って t–記述で従来述べられた事も少し注意すれば容易に s–記述に変換できるだろう．これは好都合な事である．更に，ω は粒子毎に異なるので，多粒子系の解析は s–記述によるべきという事も分かるだろう．あと詳しくは文献 2）を読んでいただきたい．

参考文献

1） T. Suzuki, "Equation of Motion and Hamiltonian for Synchrotron Oscillations and Synchro-Betatron Coupling", KEK-Report 96-10（1996）.
2） T. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **96**, 214801（2006）.
3） V. Veksler, J. Phys.（U.S.S.R.）**9**, 153（1945）.
4） E. M. McMillan, Phys. Rev. **68**, 143（1945）.
5） M. S. Livingston（ed.）, "The Development of High-Energy Accelerators",（Dover, 1966）.
6） L. J. Laslett, Proc. IXth Intern. Conf. on High Energy Accelerators, SLAC, p.394（1974）, Also LBL-3016.
7） D. A. Edwards and M. J. Syphers, "An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators",（John Wiley & Sons, Inc., 1993）.
8） A. W. Chao et al.（eds.）, "Handbook of Accelerator Physics and Engineering（2nd edition）",（World Scientific, 2013）p.66.
9） A. Piwinski, Nucl. Instr. Meth. **72**, 79（1969）.
10） 鈴木敏郎，"ビーム不安定性の理論" in OHO'86（KEK, 1986）.
11） A. W. Chao, "Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators",（John Wiley & Sons, Inc., 1993）.
12） D. Bohm and L. Foldy, Phys. Rev. **70**, 249（1946）.
13） E. D. Courant and H. S. Snyder, Ann. Phys.（U.S.A.）**3**, 1（1958）.
14） P. J. Bryant and K. Johnsen, "The Principles of Circular Accelerators and Storage Rings",（Cambridge, 1993）.
15） A. A. Kolomensky and A. N. Lebedev, "Theory of Cyclic Accelerators",（North-Holland, 1966）.
16） A. Piwinski and A. Wrulich, "Excitation of Betatron-Synchrotron Resonances by a Dispersion in the Cavities", DESY-76-07（1976）.
17） C. J. A. Corsten and H. L. Hagedoorn, Nucl. Instr. Meth. **212**, 37（1983）.