

## 垂直 3 次共鳴近傍における位相空間中での ベータトロン振動の測定

宮島 司\*・小林 幸則

### Measurement of the Betatron Oscillation in a Phase Space near the Vertical Third-order Resonance

Tsukasa MIYAJIMA\* and Yukinori KOBAYASHI

#### Abstract

We measured the betatron oscillation in a phase space near the vertical third-order resonance in the Photon Factory electron storage ring. In the measurement, the fast kicker magnets and the phase space monitor system were employed. Since the vertical resonance is non-structural one, it seemed that its strength was rather week. However, under a certain experimental condition, the stable resonance island was displayed on the phase space. In addition, we observed the island behavior with varying the octupole magnetic field strength. In this paper, we introduce the experimental method and result, and the discussion about the sources of the vertical third-order resonance.

#### 1. はじめに

円形加速器は非線形力学の良い対象として、これまでに解析的、数值的、実験的に研究が行われてきている。最近では、計算機の進歩により、非線形磁場を含んだシミュレーションも容易に行えるようになってきており、誤差等を含んだ加速器モデルを用いた非線形ビームダイナミクスの研究も行われている。しかし、現実の加速器を用いた非線形ビームダイナミクスの実験の重要性も認識されており、特に超伝導電磁石による高次の非線形磁場を多く含む LHC 等の陽子加速器では長時間安定性が問題となるため、現在の計算機をもってしてもシミュレーションはなかなか困難で、実験による研究も精力的に行われている<sup>1)</sup>。

電子貯蔵リングの場合、放射減衰により長時間安定性は問題にされないが、第三世代放射光リングや Bファクトリーのような衝突型リングでは、低エミッタンス化により、クロマティシティ補正において非常に強い 6 極電磁石が使用されるため、その非線形磁場によるダイナミックアパーチャの縮小問題が一時期盛

んに検討されたことがある。また、第三世代放射光リングでは、挿入光源が多数使用されるため、その非線形磁場の影響も無視できないとされ、これらの非線形磁場がビームに及ぼす影響を調べることは重要な課題であった。最近、放射光リングでは Top-Up 入射と呼ばれる運転モードが実際に行われるようになってきているが<sup>2)</sup>、この Top-Up 入射は、挿入光源のギャップを閉じたままで、さらにビームシャッターをオープンの状態で行うため、大きなビームロスを起こすことは避けなければならない問題であり、非線形磁場の影響でビームロスを伴うような現象をしっかりと把握しておくことが求められている。

非線形磁場の影響が特に顕著に表れるのが非線形共鳴近傍である。共鳴近傍では僅かな非線形性でも、その影響が運動に表れるため、共鳴状態は実験的な非線形ビームダイナミクスの研究対象として適している。共鳴の特徴は、ベータトロン振動の位相空間で考えるとアイランドと呼ばれる状態である。このとき各粒子の位相はある特定の値になっており、位相空間上では「島状」の軌跡を描くこととなる。

\* 高エネルギー加速器研究機構 物質構造科学研究所 放射光源研究系  
Photon Factory, Institute of Materials Structure Science, KEK, High Energy Accelerator Research Organization  
(E-mail: tsukasa.miyajima@kek.jp)

数値計算では、これらの振る舞いを調べるのに「粒子トラッキング」が行われる。これは円形加速器のモデルとなる運動方程式を計算機上で数値積分して、粒子の軌道を追跡する方法である。しかし、数値的な方法では、予め共鳴の起源となる誤差磁場等を設定しておく必要があり、現実の円形加速器において共鳴がどのようなになっているかを示すことは難しい。

このため、実験的にこの振る舞いを調べることは、共鳴の起源を知る上でも非常に重要である。位相空間中のベータatron振動の振る舞いを実験的に調べるために、我々は放射光電子貯蔵リングであるPF-ringにおいて、高速キッカーと位相空間モニターを開発した。高速キッカーは「粒子トラッキング」での初期条件を与えるための電磁石で、位相空間モニターはベータatron振動の共役な変数を測定するための装置である。ここで紹介する実験は、これらの装置を用いた実際の円形加速器での「粒子トラッキング」である。我々の実験は、実験を行う円形加速器中の条件、つまり現実のあらゆる非線形性、誤差を含んだ条件下での粒子トラッキングを行うことに相当する。

ここでは、ベータatron振動の位相空間内での観測の例として、垂直3次共鳴での実験について紹介する。垂直3次共鳴は、誤差を含まない理想的なラティスの下で、通常クロマティシティ補正に用いられる6極電磁石<sup>注1</sup>では発生しない共鳴である。さらに、今回実験を行った $3\nu_y = 13$ という共鳴は、PF-ringの超周期が2のため、比較的弱い非構造共鳴である。しかし、実験を行った結果、垂直3次共鳴近傍において共鳴の特徴的な状態であるアイランド状態が、位相空間上で明らかに観測された。また、そのアイランドは安定して存在していた。さらに、我々は共鳴状態を支配する非線形性を、8極電磁石によって積極的に変化させて実験を行った。すなわち、8極電磁石によって発生する振幅に依存したチューンシフトの変化が、アイランド状態にどのような影響を及ぼすかについても測定した。ここでは、これら垂直3次共鳴近傍において行われた実験に関して、その実験手法および実験結果について紹介する。

<sup>注1</sup> 磁場の多極展開を行うと、ノーマル成分とスキュー成分が現れる。磁場のノーマル成分は、水平対称面では水平方向の磁場を持たないため、水平面を運動する荷電粒子は水平面に留まる。加速器は一般に水平面に設置されるため、ノーマル成分の磁場が用いられる。本稿では特に断らない限り、電磁石はノーマル成分の磁場をつくるノーマル電磁石を意味することにする。

## 2. 円形加速器中でのベータatron振動の共鳴現象

円形加速器の場合の共鳴現象は、ベータatronチューンが整数、半整数、…となる場合に生じる。整数共鳴の場合、円形加速器中のある場所に誤差磁場等による外力が存在し、さらにベータatronチューンが整数になっていると、粒子は1周毎に同じ振動位相で力を受け続けることになる。粒子の振動は周回する毎に増大し、ついにはダクトなどに衝突しビームは失われてしまう。このために、通常円形加速器を運転する場合には、これらの共鳴を避ける必要がある。3次共鳴の場合には、粒子が3周毎に同じ力を繰り返し受けることになり、ベータatron振動が増大する。

ここでは、円形加速器中での粒子の横方向（水平、垂直方向）の運動を考え、位相空間中のベータatron振動の観測に必要な変数の定義を行い、ベータatron振動の共鳴現象について摂動展開から導き出されるハミルトニアンを用いて簡単な定式化を行う。また、今回紹介する垂直3次共鳴が、ラティスの超周期が保たれている場合どのようなようになるかについて、ここで導入するモデルに対して検討する。

### 2.1 線形な場合のベータatron振動

まず、円形加速器中での単粒子のベータatron振動について考える。簡単のために水平垂直方向の運動の結合はないものとし、1次元でベータatron振動を取り扱う。円形加速器では粒子は設計軌道の周りをベータatron振動しながら周回している。円形加速器でのベータatron振動を記述するために、一般的に使われている設計軌道からのずれの座標系を用いると、線形な運動の場合、粒子の運動方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{d^2y}{ds^2} + K_y(s)y = 0 \quad (1)$$

ここで、 $y$ は設計軌道に乗った座標系での垂直方向の粒子の座標、 $s$ は粒子の設計軌道上の進行方向の座標、 $K_y(s)$ は垂直方向の収束力の強さであり、電磁石の配置によって決まる $s$ の関数である。円形加速器では、一周の長さを $L$ とすると、 $K_y(s+L) = K_y(s)$ という周期性がある。さらに、多くの加速器では周長よりも短い周期が設定されている。これを超周期と呼び、超周期を $N$ とすると、周期性は $K_y(s+L/N) = K_y(s)$ となる。このベータatron振動の運動方程式を解いてやると、解は次のようになる。

$$y(s) = \sqrt{2\beta_y(s)J_y} \cos \Phi_y(s) \quad (2)$$

$$y'(s) = (-\alpha_y(s)y(s) - \sqrt{2\beta_y(s)J_y} \sin \Phi_y(s)) / \beta_y(s) \quad (3)$$

$$\Phi_y(s) = \Phi_0 + \int_0^s \frac{ds}{\beta_y(s)} = \Phi_0 + \chi_y(s) \quad (4)$$

ここで、 $y$  は粒子の位置、 $y' = dy/ds$  は粒子の傾きを表す。 $\beta_y$  は振動の振幅に関係する量でベータatron関数と呼ばれ、 $\beta_y(s+L/N) = \beta_y(s)$  という周期性を持つ。さらに、 $\alpha_y = -(1/2)d\beta_y/ds$  である。 $\Phi_y$  はベータatron振動の位相で、 $\Phi_0$  は初期条件より決まる初期位相である。 $J_y$  は作用変数で、線形な運動の場合には初期条件から決まる不変量となる。2つの変数 ( $y, y'$ ) を用いるとベータatron振動を位相空間上で表すことができ、この場合、位相空間上での振動の軌跡は楕円となる。

位相空間での運動を簡単に表すために、次に示す規格化した運動量を導入する。

$$p_y = \alpha_y y + \beta_y y' = -\sqrt{2\beta_y J_y} \sin \Phi_y \quad (5)$$

振動が線形である場合には、

$$y^2 + p_y^2 = 2\beta_y J_y \quad (6)$$

という関係を満たし、( $y, p_y$ ) 空間での軌跡は円となる。

次に、共鳴近傍での運動を記述するための準備として、線形な場合のベータatron振動に対するハミルトニアンを導入する。共役な変数を ( $y, p_y$ ) としたときのハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2} K_y(s)y^2 + \frac{1}{2} p_y^2 \quad (7)$$

となる。これに対して正準変換 (Floquet 変換) を行い、変数を ( $y, p_y$ ) から作用角変数 ( $J_y, \phi_y$ ) に変換する。独立変数として粒子の進行方向の座標  $s$  をとっていたが、円形加速器の平均半径を  $R$  ( $L = 2\pi R$  とする) として、 $\theta = s/R$  という新しい独立変数を導入する。 $\nu_{y0}$  をベータatronチューンとすると、新しい独立変数のもとでの角変数は  $\phi_y = \Phi_y - \chi_y + \nu_{y0}\theta$  となる。このとき作用角変数 ( $J_y, \phi_y$ ) を共役な変数とするハミルトニアンは

$$H = \nu_{y0} J_y \quad (8)$$

となる。運動方程式を解くと、 $J_y$  は  $\theta$  によらず不変であることがわかる。

## 2.2 共鳴近傍でのベータatron振動

次に、円形加速器中に非線形性 (6極電磁石, 8極電磁石による非線形磁場) が現れたときの、パラメトリック共鳴 ( $n\nu_y = Nl$ ) 近傍での運動を考える。簡単のために、振幅依存チューンシフトと、 $n$  次の共鳴のみがある場合を考える。単純化したモデルでは、 $n$  次の共鳴は作用角変数を用いて次のハミルトニアンで記述することができる<sup>3)</sup>。

$$H = \nu_{y0} J_y + \frac{1}{2} \alpha_{yy} J_y^2 + J_y^{n/2} G_{0,n,l} \cos(n\phi_y - l\theta + \xi_y) \quad (9)$$

このハミルトニアン内で共鳴を特徴づけるのは、 $\alpha_{yy}$ ,  $G_{0,n,l}$  の2つのパラメタである。 $\alpha_{yy}$  は振幅依存チューンシフトの大きさを表し、 $G_{0,n,l}$  は  $n$  次共鳴の強さを表すパラメタである。 $\xi_y$  は共鳴の位相で、位相空間中での振動の軌跡の傾きを表す。この共鳴のハミルトニアンに従うベータatron振動について、3次共鳴近傍で共鳴を特徴づけるパラメタが変化した場合の位相空間パターンの変化を図1に示す。図1では無次元化した作用変数を用いて位相空間パターンが描かれており、共鳴パラメタ  $\Delta$ ,  $\Omega$  は作用変数の初期値を  $J_0$  とすると、振幅依存チューンシフト  $\alpha_{yy}$  と共鳴の強さ  $G_{0,n,l}$  により、 $\Delta = (\nu_{y0} - Nl/n) / (G_{0,n,l} J_0^{n/2-1})$ ,  $\Omega = \alpha_{yy} / (2G_{0,n,l} J_0^{n/2-2})$  である。

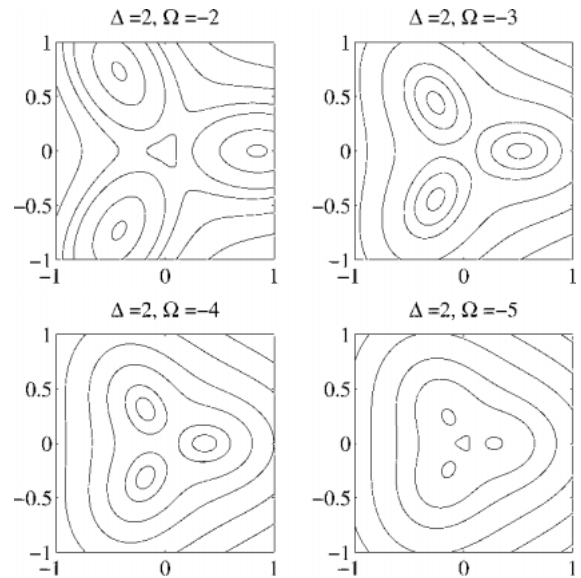


図1 Phase space motion for a third-order resonance in a normalized phase space. The phase space pattern was calculated using the nonlinear resonance Hamiltonian (9), where, the detuning parameter is  $\Delta = (\nu_{y0} - Nl/n) / (G_{0,n,l} J_0^{n/2-1})$ , the tune-spread parameter is  $\Omega = \alpha_{yy} / (2G_{0,n,l} J_0^{n/2-2})$  and  $J_0$  is the initial action variable.

$(2G_{0,n,l}J_0^{n/2-2})$  と表される<sup>4)</sup>。図1より、共鳴パラメータが変化した場合、位相空間での軌跡が変化し、アイランドの位置が変化することがわかる。また、共鳴にはストップバンドと呼ばれるベータatronチューンに対する幅があり、共鳴直上でなくてもこの領域にベータatronチューンが達すると、振動は共鳴状態に引き込まれる。

次に振幅依存チューンシフトについて考える。振幅依存チューンシフトは6極磁場、8極磁場等から生じる。ここでは、8極磁場による振幅依存チューンシフトのみを取り扱う。PF-ringでは、4台の8極電磁石が設置されている。実験では4台の8極電磁石を同じ強さに設定し、変更した。このとき振幅依存チューンシフトは次のように近似することができる。

$$\alpha_{yy} = \frac{1}{16\pi} K_3 \sum_{i=1}^4 \beta_{y,i}^2 \quad (10)$$

ここで、 $\beta_{y,i}$  は  $i$  番目の8極電磁石中でのベータatron関数である。 $K_3$  は8極磁場の強さであり、8極電磁石の有効磁場長を  $L_{oct}$ 、磁場勾配を  $d^3B_y/dx^3$ 、magnetic rigidity を  $B\rho$  とすると、 $K_3 = (L_{oct}/B\rho) d^3B_y/dx^3$  と表される。4台の8極電磁石を同時に同じ強さに設定した場合、振幅依存チューンシフトは  $K_3$  に対して線形になる。実験ではこの振幅依存チューンシフト量を変化させて、垂直3次共鳴近傍でのベータatron振動の振る舞いを位相空間上で観測している。

### 2.3 理想的な条件下での垂直3次共鳴 ( $3\nu_x = 13$ )

理想的な条件として、1)ラティスの周期性に乱れない、2)電磁石の磁場誤差、設置誤差等がない、3)水平垂直方向の運動の結合がない、という状態を考える。この条件下で、超周期  $N=2$  の場合を考えると、パラメトリック共鳴は  $n\nu_y = 2l$  ( $l=1, 2, \dots$ ) の場合のみ存在し、 $n\nu_y$  が奇数の共鳴は本来存在しないはずである。PF-ringの超周期は  $N=2$  であり、ここで紹介する垂直3次共鳴 ( $3\nu_y = 13$ ) は、 $n\nu_y = 13$  で奇数であり、理想的な条件下では生じないはずである。またラティスの周期性に乱れがある場合でも、この共鳴は非構造共鳴であり比較的弱いはずである。

また、ラティスの周期性に乱れがあり奇数次共鳴が存在する場合でも、6極電磁石、8極電磁石が理想的に設置されている円形加速器では、垂直3次共鳴は本来現れない。これは6極磁場、8極磁場のポテンシャルを考えると明らかである。6極磁場のポテンシャルは、6極磁場の強さを  $S_3 = (1/B\rho) d^2B_y/dx^2 = K_2/L_{sx}$  ( $L_{sx}$  は6極電磁石の有効磁場長) とすると、

$$V_3(s) = \frac{1}{6} S_3(s) (x^3 - 3xy^2) \quad (11)$$

と表される。ハミルトニアンの中で3次共鳴を引き起こす項は  $\cos(3\Phi)$  についての項であり、これは位置の3乗に依存するポテンシャル ( $x^3, y^3$  の項) により生じる。6極磁場によるポテンシャルでは、3次共鳴を引き起こす項は水平方向の  $x^3$  の項のみであり、垂直3次共鳴の起源となる  $y^3$  項は存在しない。また、8極磁場によるポテンシャルを考えても

$$V_4(s) = \frac{1}{24} S_4(s) (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad (12)$$

であり、垂直3次共鳴の起源となる  $y^3$  項は存在しない。ここで、8極磁場の強さを  $S_4 = (1/B\rho) d^3B_y/dx^3 = K_3/L_{oct}$  とした。このような理想的な条件下では、垂直3次共鳴は生じないはずである。

ここで紹介する実験は、理想的な条件下では存在しないはずの共鳴についての実験である。しかし、現実の円形加速器においては、周期性の乱れや誤差磁場などが存在するために共鳴が現れてくる。これらの誤差がどの程度共鳴に影響を与えているかを示し、共鳴の起源を検討していくことが本稿での目的である。

## 3. ベータatron振動の位相空間内での観測

円形加速器中でのベータatron振動を調べる場合、位相空間での情報を得ることが出来ると非常に有効である。ベータatron振動の位相空間での振る舞いを調べるためには、1)ビームに初期条件を与えられること、2)共役な変数をターンバイターンで測定できることが要求される。我々は、ビームに初期条件を与えるための高速キッカーと、位相空間内での情報を得るための位相空間モニターシステムを開発し、これらを用いて実験を行った<sup>5)</sup>。

### 3.1 高速キッカー

計算機での粒子トラッキングでは、初期条件を与えた後、粒子のベータatron振動を追跡している。ここで紹介する実験でも、測定開始時にビームに対して初期条件を与え、ビームに重心振動(粒子の振動位相の揃ったコヒーレント振動)を起こした後の振動を測定している。ビームに初期条件を与えるために、我々は高速キッカー電磁石を用いた。高速キッカーは水平方向用、垂直方向用の2台の電磁石から構成される。高速キッカーの特徴は、シングルバンチビームに対して、1度だけ瞬間的にキックすることが可能であり、キッカーの最大蹴り角内で任意の初期条件を与えるこ

表1 Specifications of the fast kicker magnet system

Magnet Core Metal	Ferrite
Coil Turn Number	2
Core Gap [H/V]	56/96 mm
Core Length	150 mm
Magnet Inductance [H/V]	2.2/1.1 $\mu$ H
Maximum Charging Voltage	40 kV
Maximum Repetition Rate	0.5 Hz
Pulse Width [H/V]	600/600 nsec

とができるということである。シングルバンチビームを1度だけキックするためには、キッカーのパルスの立ち上がり・立ち下がり時間が、ビームの周回時間より短いことが要求される。PF-ringではビームの周回時間は624 nsecであり、キッカーのパルスはこの時間よりも短くなければならない。我々の高速キッカーの場合は、それらの時間が、水平方向用、垂直方向用キッカーともに300 nsec程度であり、ビームの周回時間より短いので、キッカーを励磁するとビームを一度だけキックすることが可能となっている。表1に高速キッカーの基本性能を示す。

水平方向用、垂直方向用キッカーは、それぞれ独立に制御することができる。我々の高速キッカーでは、水平方向用、垂直方向用を同時に励磁し、それぞれの強さを調整することにより、水平軸から垂直軸まで連続な方向にビームをキックすることができ、結合共鳴の観測や、横方向のダイナミックアパーチャの実験的測定も行うことが可能となっている<sup>6)</sup>。

### 3.2 位相空間モニター

ベータatron振動の位相空間での情報を得るためには、ビームの位置の他に、ビームの傾きを測定する必要がある。1箇所のボタン電極からの信号だけでは位相空間の情報を得ることができず、2箇所での信号を同時に測定する必要がある。このために、我々は位相空間モニターシステムを開発した。位相空間モニターシステムは2箇所のボタン電極型ビーム位置モニター(BPM)の信号を同時に取り込み、ビームの位置と傾きをターンバイターンで測定するための測定装置である。位相空間モニターシステムの概略図を図2に示す。2箇所の6極型ボタン電極位置モニターからの信号を独立に処理し、1ターン毎にそれぞれの電極の電圧を読み出し、A/D変換(8 bit 20 MHz)を行い、メモリーに保存させる。その電圧情報は GPIB で接続されたオンライン計算機により読み出すことが可能となっている。オンライン計算機上でそれぞれの

6極型ボタン電極の電圧情報を、ボタン電極のマッピングデータから位置情報に変換することにより、1ターン毎の2箇所の位置情報が得られる。実験では16384周回分のデータを保存している。

我々の実験では、PF-ringの北直線部に設置された2箇所のBPMを用いて、位相空間での測定を行った。2箇所のBPM間は偏向電磁石、4極電磁石等の電磁石のないドリフトスペースであり、BPMの位置データをそれぞれ $y_1$ ,  $y_2$ とすると、位置 $y$ と傾き $y'$ は次のように表すことができる。

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (13)$$

$$y' = \frac{dy}{ds} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta L} \quad (14)$$

ここで、 $\Delta L$ を2箇所のBPM間の距離とした。

これらの位置と傾きのデータ( $y, y'$ )より、位相空間を描くことが可能であるが、実際には規格化された運動量 $p_y$ を用いて位相空間を描かせている。この時、( $y, y'$ )から( $y, p_y$ )への変換のために、式(5)に現れる2つのパラメータ $\alpha_y, \beta_y$ が必要となる。 $\alpha_y, \beta_y$ は、実験を行うオペレーティングポイントの近傍で、できるだけ非線形性を避けるため、微小振動を起こした時の測定データより決定された。線形な運動であると仮定して、微小振動の測定データの( $y, p_y$ )空間での軌跡が円になるように、 $\alpha_y, \beta_y$ を決定した。また、この位相空間モニターでの位置分解能は、5 mAのビーム電流値で水平方向、垂直方向ともに0.1 mm程度であった。

次にボタン電極により測定される振動について触れておく。ボタン電極により測定される振動は、個々の粒子の位相が揃った重心振動のみである。このため、ビームを構成するそれぞれの粒子が振動していても、その振動位相が不揃いな場合には、重心振動で見ると振動が起きていないように見える。また、キック直後で大振幅の振動が起きている場合でも、非線形磁場の影響により各粒子の振動位相が不揃いになっていく場合、重心振動があたかも急激に減衰しているように見える場合がある。これは非線形フィラメンテーションと呼ばれる現象である<sup>7)</sup>。このような減衰は、ビームの多粒子性に起因するものであり、単粒子の場合の振動減衰とは分けて考える必要がある。実際の振動減衰は、放射減衰、ヘッドテイル減衰などが複雑に絡み合って引き起こされる。

### 3.3 PF-ringでの測定

実験は、放射光電子貯蔵リングであるPF-ringで行

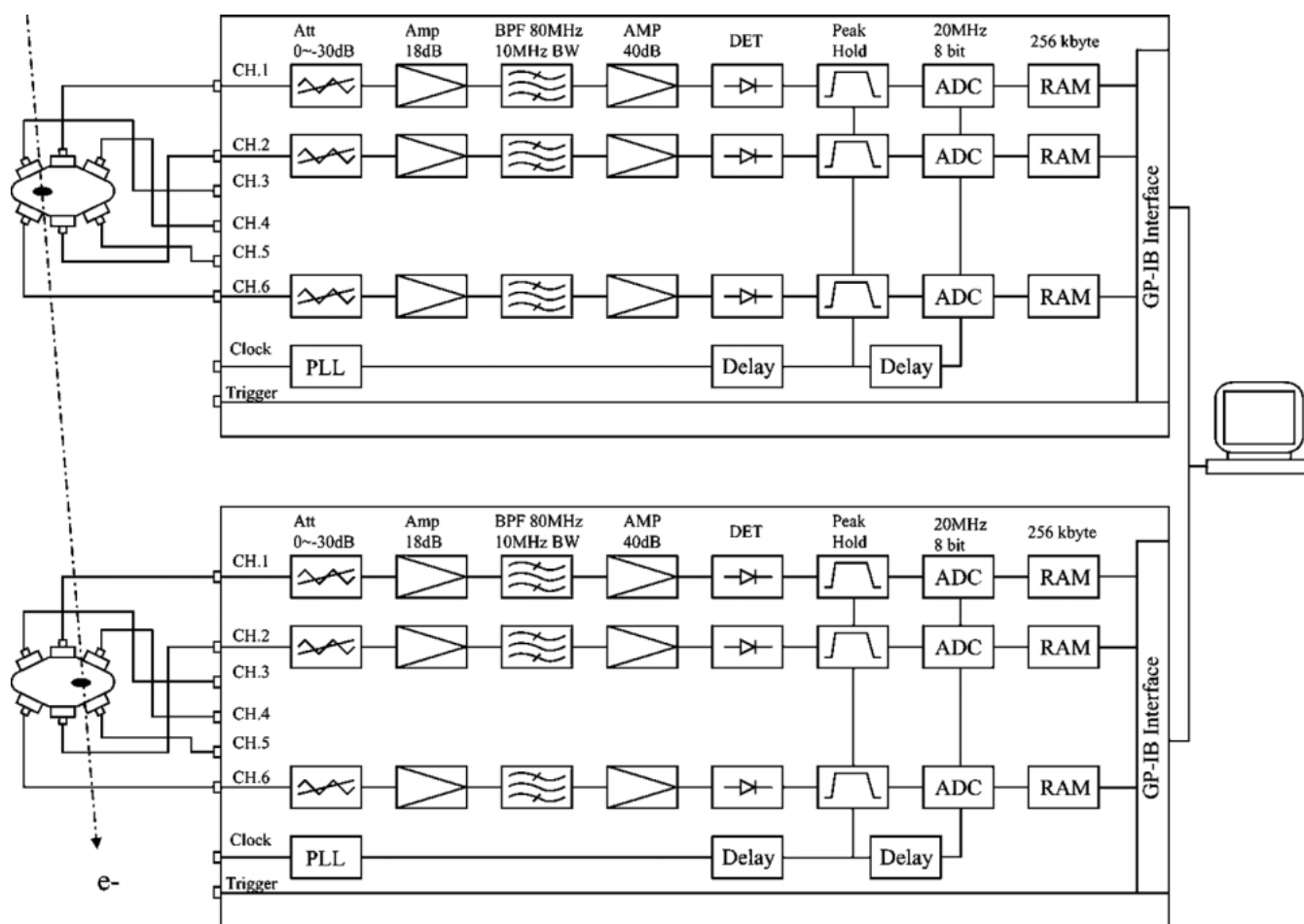


図 2 Block diagram of the phase space monitor system.

表 2 Principal parameters of the Photon Factory electron storage ring under the present optics

Parameter	Value
Beam energy	2.5 GeV
Circumference	187 m
Harmonic number	312
Betatron tune [H/V]	9.60, 4.28
RF frequency	500.1 MHz
Revolution period	624 nsec
Emittance [H/V]	36, 0.36 nm·rad
Energy spread	0.00073
Beam size [H/V]	0.58, 0.04 mm
Radiation damping time [H/V]	7.8, 7.8 msec

われた。表 2 に PF-ring の基本パラメータを示す。PF-ring は基本的に 2.5 GeV, 450 mA, 280 バンチで運転されている。水平方向のエミッタンスは 36 nm·rad である。非線形磁場成分を発生する電磁石として、ク

ロマティシティ補正用の 6 極電磁石 32 台の他に、マルチバンチ運転時に観測される垂直方向ビーム不安定性抑制のために、8 極電磁石が 4 台設置されている。

PF-ring での高速キッカー、位相空間モニター用 BPM、そして 4 台の 8 極電磁石の配置を図 3 に示す。高速キッカーは、水平方向用、垂直方向用が同じ直線部に並んで配置されている。また、振幅依存チューンシフトを変化させるための 8 極電磁石はアーク部に配置されている。8 極電磁石は両極性で、電磁石 1 台あたりの  $K_3$  を  $-390 \text{ m}^{-3}$  から  $390 \text{ m}^{-3}$  まで変化させることができる。

#### 4. 垂直 3 次共鳴での実験結果

垂直 3 次共鳴近傍でのベータトロン振動測定のために、まず共鳴状態になるパラメータの探索から行った。このとき、初期条件を変えるために、高速キッカーの蹴り角、つまり初期振幅の大きさと、初期ベータトロンチューンを変更してパラメータの探索を行った。これまでの実験で、共鳴の特徴的な状態である位

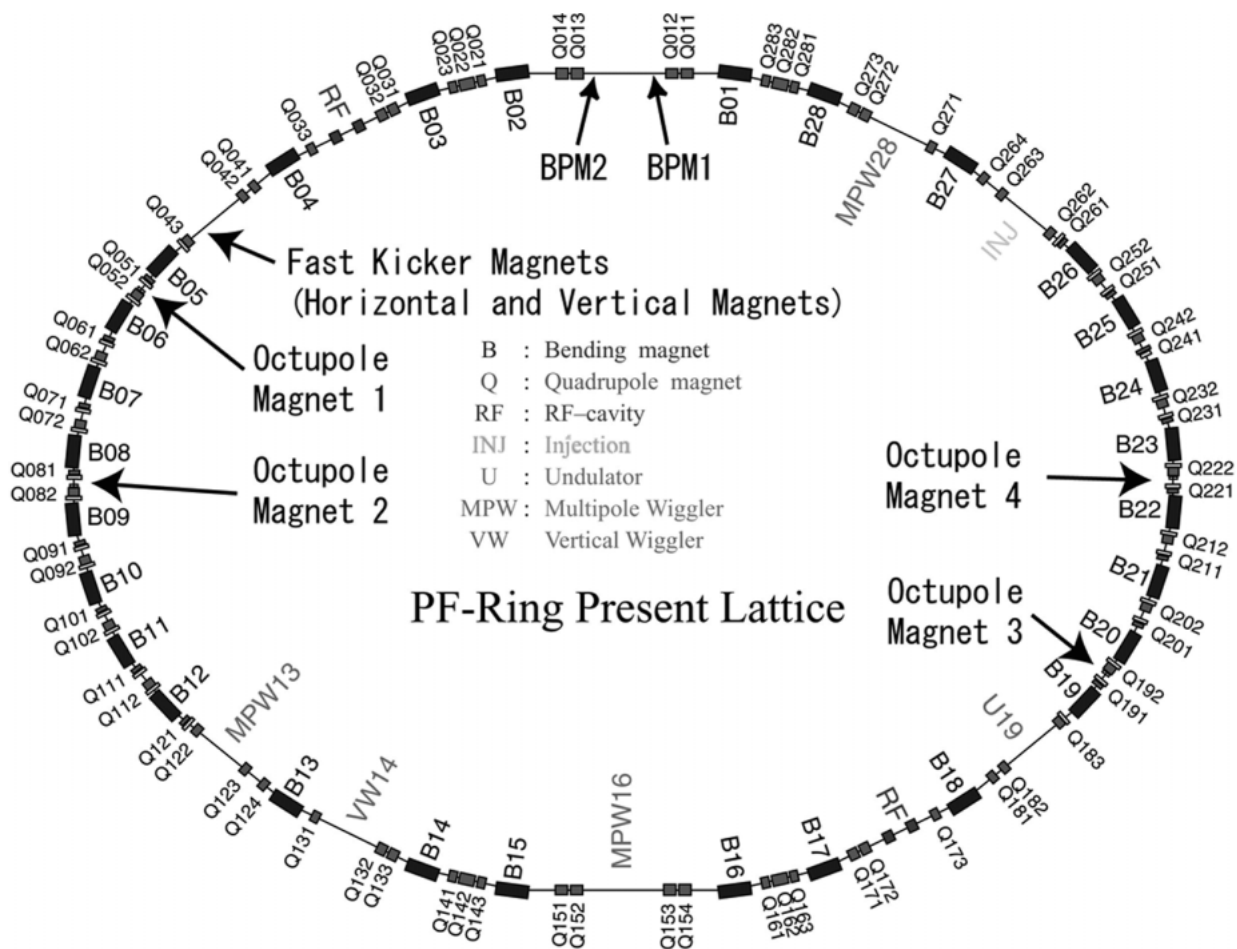


図3 Layout of the fast kicker magnets, two BPM's and four octupole magnets in the PF-ring.

相空間内でのアイランドが形成されるのは、ある特定のパラメタの範囲内だけであることがわかっている。通常 PF-ring では  $(\nu_x, \nu_y) = (9.60, 4.28)$  というオペレーティングポイントで運転されているが、この近傍の  $3\nu_y = 13$  という垂直 3 次共鳴近傍にオペレーティングポイントをずらした後に、ベータatronチューンと高速キッカーの蹴り角を調整して、アイランド状態が観測される条件を探索した。初期振幅  $y(0) = 4$  mm, 初期ベータatronチューン  $(\nu_{x0}, \nu_{y0}) = (9.602, 4.331)$  の時に、安定したアイランドが形成された。この条件を基準にして、8 極磁場の変化に対するベータatron振動の応答を測定した。垂直 3 次共鳴近傍のチューンダイアグラムを図 4 に示す。高速キッカーによりビームに初期振幅が与えられると、振幅依存チューンシフトの大きさに応じてチューンが変化し、3 次共鳴に近づく。8 極磁場が変わることにより、初期チューンは共鳴線より下の状態から、共鳴線直上、共鳴線を超える状態になる。今回の実験条件の下では振幅依存チューンシフトは常に正であり、ビームをキックした

後、ベータatronチューンは常に共鳴に近づくという状態に設定された。これは、6 極電磁石による振幅依存チューンシフトが正の大きい値であるため、8 極電磁石で設定できる最小の  $K_3 = -390 \text{ m}^{-3}$  を設定しても、それよりも 6 極磁場による振幅依存チューンシフトの方が大きい値を持つからである。

垂直 3 次共鳴でアイランドが形成される条件が見つかった後、8 極磁場を変化させて位相空間でのベータatron振動の測定を行った。実験の初期条件は、1) 初期ビーム電流  $I_0 = 1.3$  mA (シングルバンチ), 2) 初期振幅  $y(0) = 4$  mm, 3) 初期ベータatronチューン  $(\nu_{x0}, \nu_{y0}) = (9.602, 4.331)$  であり、実験中これらのパラメタは固定され、8 極磁場の強さのみが変更された。初期ビーム電流は、大電流によるビーム不安定性の効果を出来るだけ小さく抑えるために、電流値 1.3 mA に設定された。

図 5, 図 6 に  $K_3$  を変えたときのベータatron振動の時間変化, 位相空間での振る舞い, そしてビーム電流の変化を示す。  $K_3$  が変化するに従い、振動減衰状

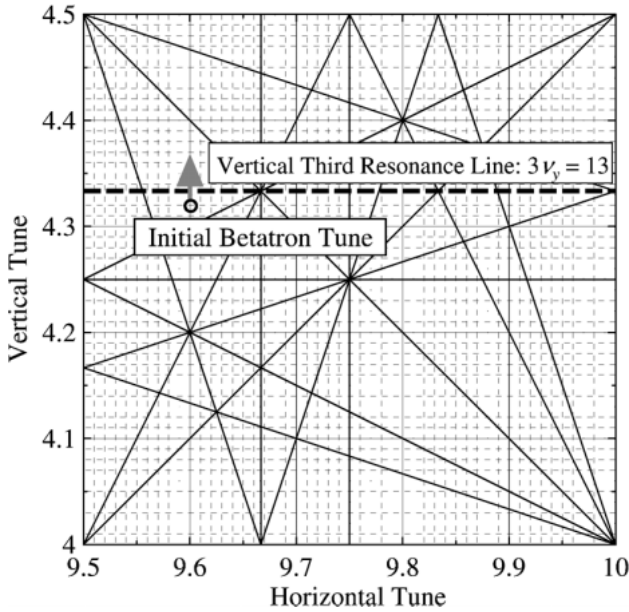


図 4 Tune diagram near the vertical third-order resonance. The circle indicates the initial betatron tune. After the kick, the vertical betatron tune immediately moves toward the third-order resonance line.

態からアイランドが形成される状態へ変化していることがわかる。これは、単純に考えると、 $K_3$  の変化により振幅依存チューンシフトが変化し、同じ初期振幅を与えても到達するチューンが変化することによって生じていると考えることができる。 $K_3$  が小さいうちは振幅依存チューンシフト量が小さく、共鳴まで到達していないが、 $K_3$  が増加し振幅依存チューンシフトが増大すると共鳴のストップバンドに入り、共鳴の特徴的な状態であるアイランドが形成される。共鳴のストップバンドにはある程度の幅があり、 $K_3$  のある範囲に渡って安定にアイランドが形成される状態があることがわかる。

このアイランドが形成される範囲がどの程度であるかを評価する量として、次に示すキュムラントを導入する。アイランド状態は振動の位相が固定された状態であり、3 周毎に同じ位相になる状態である。この状態を特徴づけるために振動位相  $\phi$  についてのキュムラントを導入する。まず、位相空間モニターシステムから得られた  $\phi$  のデータを 1 周目、2 周目、3 周目ごとに分ける。 $\phi_j$  を  $j$  周目のデータとして、1 周目のデータを  $\phi_{1,i} = \phi_{3i-2}$ 、2 周目のデータを  $\phi_{2,i} = \phi_{3i-1}$ 、3 周目のデータを  $\phi_{3,i} = \phi_{3i}$  と分ける。ここで、全部で  $3M$  周の  $\phi$  のデータがあるとし、 $i = 1, 2, \dots, M$  とした。 $n$  次の共鳴であれば、 $n$  個の  $\phi_{n,i}$  のデータに対し

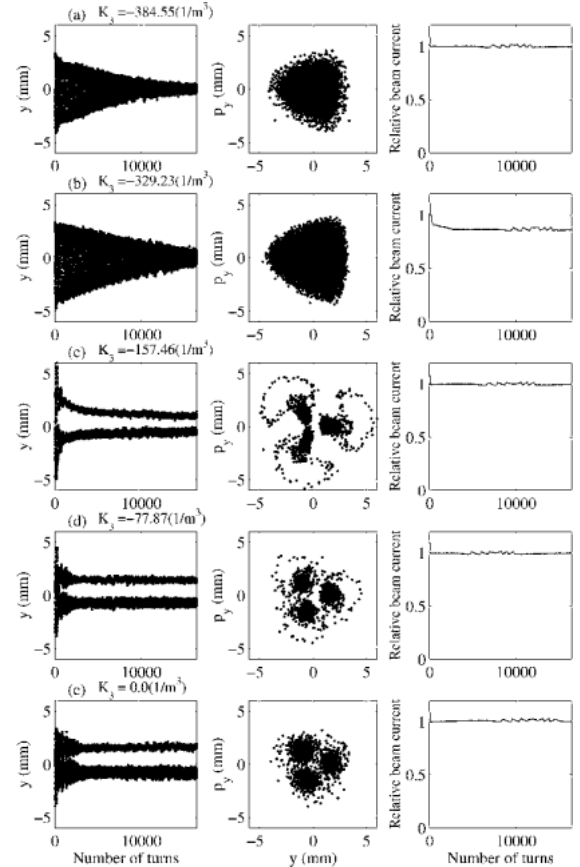


図 5 Turn-by-turn data measured at the octupole strengths of  $K_3 = -384.55, -329.23, -157.46, -77.87$  and  $0.0 \text{ (m}^{-3}\text{)}$ . The vertical coherent betatron oscillations, the normalized phase space plots and the relative beam currents after the kick are shown in left, center and right column, respectively.

て、位相のキュムラントを次のように定義する。

$$C_n = \langle (\phi - \langle \phi \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{nM} \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^M (\phi_{m,i} - \langle \phi_m \rangle)^2 \quad (15)$$

$$\langle \phi_m \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \phi_{m,i} \quad (16)$$

$C_n$  は安定なアイランドが形成され、分割した位相  $\phi_{n,i}$  がほぼ同じ値の周りに分布する場合は zero に近づく。一方、アイランドが形成されず分割した位相が  $-\pi$  から  $\pi$  まで一様に分布する場合には  $\pi^2/3$  になる。図 7 に  $K_3$  が変化したときの位相のキュムラントを示す。安定したアイランドが形成されている場合には、 $C_3$  はほとんど zero となり、アイランドが形成されず振動が減衰する場合にはほぼ  $\pi^2/3$  になっている。 $K_3 = -200 \text{ m}^{-3}$  付近でアイランドが形成されるかどうかの境界があることがわかる。



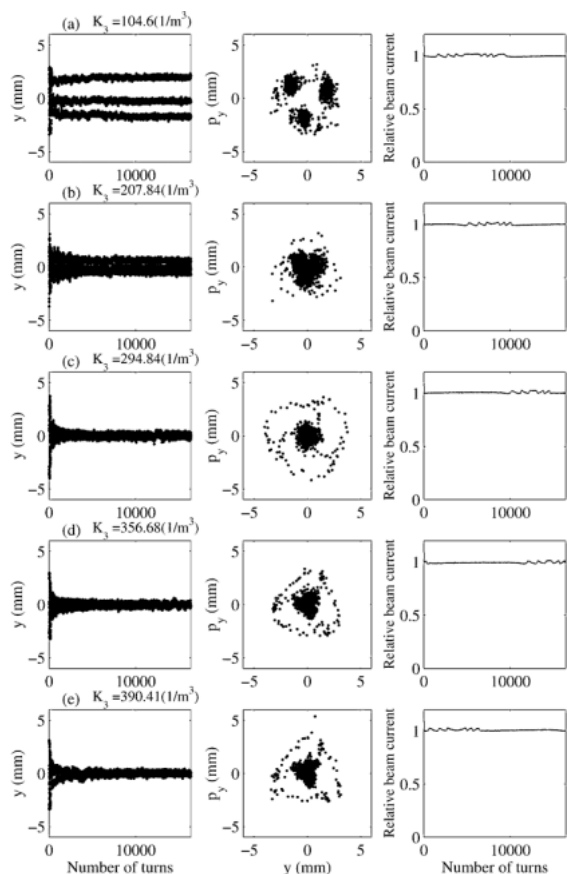


図6 Same as figure 5, but the data measured at the octupole strengths of  $K_3 = 104.60, 207.84, 294.84, 356.68$  and  $390.41 \text{ (m}^{-3}\text{)}$ .

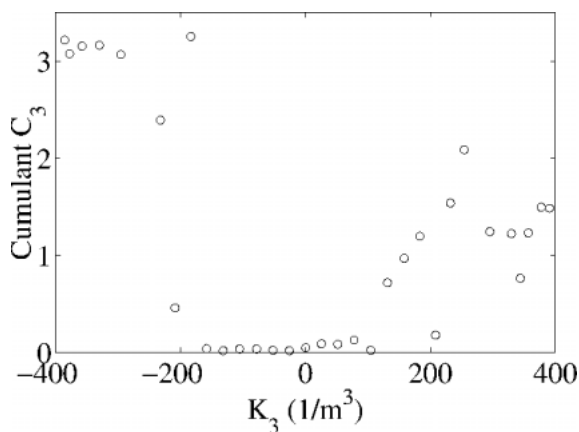


図7 The cumulant of the angle variable is plotted as a function of the octupole field strength  $K_3$ .

また、ある特定の8極磁場の強さにおいて、ビーム電流の減少が観測された。図5の(b) ( $K_3 = -329.23 \text{ m}^{-3}$ ) にビーム電流の減少が起きているときの様子を示す。このとき、ビーム電流の減少はキック直後から発生していることがわかる。図8に  $K_3$  が変

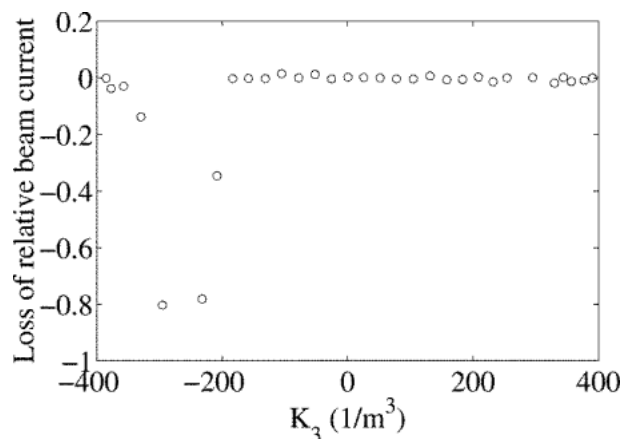


図8 The beam loss after the kick is plotted as a function of the octupole field strength  $K_3$ .

化したときのビーム電流の変化を示す。図8ではキック直後のビーム電流を基準として、16384周回後にビーム電流がどれだけ減少したかを示した。位相のキームラントの振る舞いと比較すると、ビームの減少は振幅依存チューンシフトが小さくアイランドが形成されずに振動が減衰する状態から、安定なアイランドが形成される状態へ変化する領域の直前のある範囲において観測されている。安定なアイランドが形成された状態ではビームの減少は発生していない。今回の実験条件では、最大振幅の時でもビームの振動振幅は真空ダクトによって決まる物理口径よりも小さいため、ビームの減少はダイナミックアパーチャに関連しているのではないかと考えられる。

## 5. 垂直3次共鳴の起源

### 5.1 8極磁場を変更したときの効果

ここでの実験では、8極磁場の強さを変えて、垂直3次共鳴近傍でのベータatron振動の振る舞いを位相空間内で観測した。8極磁場を変えるということは、単純に考えると振幅依存チューンシフトを変えることに相当する。初期ベータatronチューンは固定された状態であるので、キック前の初期条件は同一であると考えることができる。しかし、高速キッカーにより初期振幅が与えられたときのチューンは、振幅依存チューンシフトによって変化するため、同一にはならない。つまり、8極磁場を変更したときの効果は、キック直後のチューンと共鳴との距離を変化させることである。さらに非線形共鳴のハミルトニアン(9)より明らかなように、振幅依存チューンシフトは位相空間のパターンも変化させる。

また、アイランド状態は粒子群の位相が揃った状態

が長時間持続する状態であるが、図 5 の(c)のようにアイランドのまま振動振幅が減衰しているような状態が観測された。これは、定性的に考えると、8 極磁場等の非線形磁場により、個々の粒子の位相が僅かにずれていくため、位相空間上での分布がアイランドの点から同心円上に徐々に広がり、重心振動で見ると振幅が小さくなっているような状態と考えることができる。

## 5.2 垂直 3 次共鳴の起源

先に説明したように、垂直 3 次共鳴は理想的な条件下では生じないはずであった。しかし、ここで示した PF-ring での実験では、明らかな共鳴状態が観測された。ラティスの超周期性は、電磁石の設置誤差や挿入光源の非対称な配置などにより  $N=2$  から乱れていると考えられる。しかし、超周期性が乱れている場合でも、6 極電磁石、8 極電磁石が理想的に設置されている状態では、垂直 3 次共鳴の起源となる  $y^3$  のポテンシャルが存在せず、共鳴は生じないはずであった。ここでは、実験で見られた共鳴の起源がどのようなものから生じるか考える。

まず、6 極電磁石に誤差がある場合の影響を考える。6 極磁場のポテンシャルは式(11)で表されるが、この磁場が角度  $\delta$  だけ傾いていると仮定する。磁場の傾きは回転変換

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \delta + y \sin \delta \\ \bar{y} = -x \sin \delta + y \cos \delta \end{cases} \quad (17)$$

により記述することができる。6 極磁場のポテンシャルは式(11)で表されるように  $x^3$  の項を含むが、磁場が回転している場合、この項を通して  $y^3$  の項が現れてくる。また、 $3xy^2$  の項からも  $y^3$  の項が現れる。これが垂直 3 次共鳴の起源になると考えられる。実験中は  $K_3$  のみを変化させ、6 極磁場は固定されていたので、6 極電磁石の回転から現れる垂直 3 次共鳴は  $K_3$  に依らず定数になると考えられる。PF-ring で使用している 6 極電磁石は、放射光取出し用ダクトとの干渉を避けるために、非対称な形状の C 型形状となっている。このため、6 極磁場が僅かに傾いていることが予想され、これが垂直 3 次共鳴の起源になっていると考えられる。

次に 8 極電磁石からの寄与を考える。8 極電磁石中での軌道が磁場中心からずれて一定の垂直 COD  $y_0$  が発生していると仮定する。このとき、8 極磁場中でのビームの位置は

$$\bar{y} = y + y_0 \quad (18)$$

と表される。これを 8 極磁場のポテンシャルの式(12)に代入すると、位置の 4 乗の  $y^4$  項より  $y^3$  の項が生じ、これも垂直 3 次共鳴の起源となる。この共鳴の起源は、8 極磁場の強さと磁場中心からのずれ  $y_0$  に依存している。つまり、 $K_3$  が変化したときに、共鳴の強さも変化することになる。

6 極電磁石の回転による共鳴への寄与と、8 極電磁石中での COD による寄与を合わせると、垂直 3 次共鳴の起源となるポテンシャルは次のように表すことができる。

$$V_{v3}(s) = \frac{1}{12} \left( -3\sqrt{2} S_3(s) \delta + \frac{1}{2} S_4(s) y_0 \right) \times (\beta_y J_y)^{3/2} \cos(3\Phi_y) \quad (19)$$

このポテンシャルより、垂直 3 次共鳴の強さ  $G_{0,3,l}$  は次のように計算される。

$$G_{0,3,l} e^{i\phi_{y,l}} = \frac{1}{24\pi} \int_0^L ds \beta_y^{3/2} \left( -3\sqrt{2} S_3(s) \delta + \frac{1}{2} S_4(s) y_0 \right) e^{i[3X_y(s) - (3\nu_y - l)\theta]} \quad (20)$$

このとき、共鳴の起源は  $K_3$  に依存しない定数部分(右辺第一項)と、 $K_3$  に依存する部分(右辺第二項)が存在すると予想される。 $G_{0,3,l}$  の右辺第二項では  $S_4 = K_3/L_{\text{oct}}$  の  $K_3$  依存だけでなく、 $y_0$  自身も  $K_3$  に依存すると考えられ、 $G_{0,3,l}$  の変化は複雑になることが予想される。この  $G_{0,3,l}$  の変化については、今後明らかにしていく予定である。

## 6. ま と め

位相空間内のベータatron振動の観測実験について、高速キッカーと位相空間モニターシステムによる測定法を紹介し、具体的な例として垂直 3 次共鳴についての実験結果を示した。垂直 3 次共鳴近傍での実験では、振幅依存チューンシフト量を変化させながら、共鳴状態の変化を位相空間内で測定した。8 極磁場による振幅依存チューンシフトの変化に対応して、共鳴の特徴的な状態であるアイランド状態の変化が観測された。また、振動減衰状態からアイランド状態へ変化する境界近傍において、ビーム電流の減少が見られた。これはダイナミックアパーチャが共鳴により狭まったためではないかと考えられる。さらに、理想的な条件下では本来生じないはずの垂直 3 次共鳴の起源についての検討を行い、6 極磁場の傾きと 8 極電磁石中での垂直方向 COD がこの共鳴の起源になることを示した。

位相空間での振る舞いは、単粒子系であれば式(9)のような簡単なハミルトニアンで記述することができる。このようなハミルトニアンをモデルとして仮定し、実験データを当てはめることにより共鳴パラメータを決めることが可能である。今後、これらの共鳴パラメータの非線形磁場依存性を実験的に決定する予定である。今回紹介した垂直3次共鳴においては、振幅依存チューンシフトだけでなく共鳴の強さも8極磁場の強さに依存するため、共鳴の強さがどのような8極磁場依存性を持つか実験的に調べる予定である。

今回紹介した実験では、単粒子的な取り扱いが可能となる条件に近づけるために、ビーム電流を1.3 mAという位相空間モニターシステムで測定可能な小さい値に設定した。この他に、ビーム電流を10 mAまで増やして実験を行っているが、このとき低電流とは異なる振動減衰が見られている。これは、ヘッドテイル効果に関係していると推測される<sup>8)</sup>。ビーム電流の違いによる影響については今後シミュレーションと合わせて議論したい。

また、非線形磁場の強さが変わったときの振動減衰は、個々の粒子の振動が減衰するのではなく、ビームの重心振動が減衰する非線形フィラメンテーションによるものであるが、ここではその詳細な検討は行わなかった。我々の実験では、重心振動の減衰を調べることにより、多粒子性に起因する振動減衰がどのような過程で起きるかも調べることが可能である。さらに実験ではアイランドが形成された状態のまま振動が減衰

していくという過程も観測されており、共鳴近傍での個々の粒子の位相がどのように変化しているかも今後検討する予定である。

さらに、垂直方向の振動では、6極電磁石の存在により、水平方向の振動との結合が発生する。式(11)の6極磁場によるポテンシャル中に $xy^2$ の項があるため、垂直方向の振動が生じると、水平垂直方向の振動の結合が生じる。実験では、垂直方向の測定と同時に水平方向のベータatron振動の測定も行っている。今回の実験では、垂直方向の振動に比べて小さいが、水平方向の振動が観測されていた。ここでは、簡単のために水平方向との運動の結合は無視したが、水平方向の振動も同時に解析することにより、この結合の影響も評価することが可能である。

## 参考文献

- 1) S. Y. Lee *et al*, Phys. Rev. Lett., **67**, p. 3768 (1991).
- 2) L. Emery, in Proceedings of the 2001 Particle Accelerator Conference, 2001, pp. 2599–2601.
- 3) S. Y. Lee, *Accelerator Physics* (World Scientific, 1999).
- 4) H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
- 5) Y. Kobayashi *et al*, in Proceedings of the Fifth European Particle Accelerator Conference, 1996, pp. 1666–1668.
- 6) Y. Kobayashi *et al*, in Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference, 1993, pp. 215–217.
- 7) S. Kamada *et al*, KEK Preprint pp. 97–261 (1998).
- 8) K. Ohmi and Y. Kobayashi, Phys. Rev. E, **59**, p. 1167 (1999).