「加速器」Vol. 1, No. 2, 2004（79–97）

解　説

サイクロトロンにおけるシンクロトロン振動
—サイクロトロンの非線形加速理論—

佐藤　健次*

Synchrotron Oscillation in Cyclotrons
—Nonlinear Acceleration Theory for Cyclotrons—

Kenji SATO*

サイクロトロンでは，粒子の運動は等時性になり，入射から取り出しまでの周回数が少ないこともあって，入射時点での，粒子の高周波加速電圧に対する位相の広がりで，取り出しビームのエネルギー幅が決まると考えられている．しかし，等時性は，粒子の運動を，エネルギーに対して，線形一次の近似で取り扱うときの運動の様態であり，正しくは，高次の非線形項により取り扱うべきである．渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く場合，最初に，仮想的な基準の運動を求め，その周りを，粒子は非線形運動することを解けば良いが，その手順に則った，二段階構成の非線形加速理論が可能であることが分かって来た．それによれば，運転条件によっては，位相空間において，安定不動点や不安定不動点を持つセパラトリックスを有する非線形振動が発生する．このとき，バンチしたビームの安定な加速が可能になると同時に，位相空間での運動の制御が取り出しビームの品質に影響し，そのときの条件は非常に厳しいものであるため，ビームの入射条件や磁場の僅かな変化に対して，取り出しビームのエネルギー幅が大きく変化することになる．

I　序　　論

東大核研でSFサイクロトロン及びクーラー・シンクロトロンTARN Ⅱそれに大ハドロン計画，放医研でHIMACのシンクロトロン，そして，現在，阪大核物セでサイクロトロンと，サイクロトロンとシンクロトロンの二種類の円形高周波加速器の建設チームや研究グループに，どう言う訳か，常に皆さんより少しばかり遅れて参加しては転々としただけに，どの加速器についてもプロにはなり切れていないようである．

そんなノンプロの目から見て，シンクロトロンの加速理論が分かり易く出来ており，しかも，サイクロトロンの加速理論に適用出来そうな用語が幾つか用意されていると思える．何故，シンクロトロンの加速理論が分かり易いかと言うと，粒子の運動は，シンクロトロン振動とベータトロン振動の二つの運動の重ね合わせとなるが，エネルギーはシンクロトロン振動するものの，ベータトロン振動しないので，両者は分離出来る点にある．そこで，シンクロトロンの加速理論をお手本にすると同時に，それを拡張することによって，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く，サイクロトロンの加速理論を構築する試みに取り組んで来たところ，縦方向ずれ運動が非線形運動になるため，エネルギーはベータトロンずれ振動せず，また，条件によっては，非線形運動が非線形振動になり，サイクロトロンでシンクロトロンずれ振動が起こることが分かって来たので，それを解説する．

二十数年前，サイクロトロンからシンクロトロンへと研究対象のハンドルを切り，GSIでシンクロトロンの加速理論を初めて勉強したが，transition energyの存在を知って驚いた．このエネルギーを境にして，シンクロナス粒子のエネルギーが上下すると，位相の変化率の運動方程式に現れる，一次のphase slip factorの符号が正負反転するのだから，確かに，transition energyではあるが，このエネルギーにシンクロナス粒子のエネルギーが一致すると，その他の粒子のシン

* 大阪大学核物理研究センター加速器研究部門
Research Center for Nuclear Physics (RCNP), Osaka University
(E-mail: sato@rcnp.osaka-u.ac.jp)

クロナス粒子に対する相対運動の位相は，粒子に応じて異なる値ではあるものの，一定で等時性となり，等時性サイクロトロンの加速理論が出来上がっていると思えたからである．

十年近く前，シンクロトロンからサイクロトロンへと研究対象のハンドルを再び切り，阪大核物セでサイクロトロンの性能向上に取り組む中で，数年前に，ビームのエネルギー幅が，磁場のずれに非常に敏感で，しかも，その正負の符号に依存して良かったり悪くなったりする，単純には説明し難い，特に，磁場のずれに対する線形現象としては説明し難い，不可思議で奇妙な現象に遭遇した．

二十数年前，等時性運動が起きていると思ったのは，位相の変化率の運動方程式を，エネルギーのずれの線形一次の項のみで近似したためであるが，それでは，不可思議で奇妙な現象を説明することは出来ず，等時性運動とか，粒子のエネルギーが transition energy に一致して一次の phase slip factor がゼロになるとき，エネルギーのずれの線形一次の項が消えているものの，その二乗の項がリーディング・タームとして残っていることを考慮すべきであることに気付いた．

それと同時に，不可思議で奇妙な現象を説明するためには，位相の変化率の運動方程式において，磁場や加速電圧（周波数と振幅）のずれを取り扱うべきであり，そのためには，最初に，仮想的な基準となる運動を求めておく必要があるため，サイクロトロンの非線形加速理論を二段階構成にすれば良いことに気付いた．

こうした加速理論を構築するに際して，軌道半径が小さくエネルギーが低いときから，軌道半径が大きくエネルギーが高いときまで，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く運動に対して，次の質問に答えて行く必要があった．

- シンクロトロンでは利用する機会が少ない運動方程式が大活躍するのは何故か？
- この運動方程式は軌道半径が小さくエネルギーが低いときの運動を記述出来るのか？
- この運動方程式と他の運動方程式との間にはどんな関係があるのか？
- エネルギーが低いときの運動は特殊相対論と非相対論とで一致するのか？
- 渦巻き状軌道を描きながら加速されるときの波乗り加速の電場はどう求まるのか？
- 仮想的な基準の渦巻き状軌道を描く加速運動や磁場分布をどのように求めるのか？
- 静磁場の時間による微分がノンゼロになるのは何故か？
- 縦方向ずれ運動と横方向ずれ運動とをどのようにして区別するのか？
- 縦方向ずれ運動が非線形運動になる要因は何か？
- 非線形運動が起こるとエネルギーが横方向ずれ運動しないのは何故か？

第一段階では，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く粒子の特殊な運動を，仮想的な基準の運動と想定し，その運動を実現出来る，仮想的な基準の磁場分布と加速電圧（周波数と振幅）との関係を，運動方程式を微分し，そのとき得られる式を解くことにより，求める．第二段階では，任意の磁場分布と加速電圧（周波数と振幅）が仮想的な基準からずれているとし，そのずれの下での，任意の粒子の運動を，二段階の過程を経て，横方向ずれ運動が，縦方向ずれ運動からのずれの運動として表現される運動方程式と，縦方向ずれ運動が，仮想的な基準の運動からのずれの運動として表現される運動方程式を得る．そのとき，いずれのずれも微小量であるとして，近似を適用し，それぞれの運動方程式を簡単化し，これらの運動方程式を積分することにより，解としてのずれの運動を求める．

このとき，縦方向ずれ運動はエネルギーのずれに対して非線形運動になり，その結果，エネルギーが横方向ずれ運動しなくなる．その点では分かり易くなるものの，非線形運動そのものでは，多種多様で数多くの運動の様態が発生し，非常に複雑で，現時点では，いずれの運動方程式も，見通しの良い形で，解けていない．そのため，まだ，その全容を把握出来ていない．

その中の一つに，軌道半径が大きくエネルギーが高いとき，ある条件の下では，サイクロトロンではこれまで知られていなかった，非線形運動であるシンクロトロンずれ振動が起こり，この解説では，それを示す．

しかし，それはほんの一例で，他にも，知られていない運動の様態があり，未開拓の肥沃な土地が目の前にあると言える．それを開拓することで，今以上の，サイクロトロンのビームの高品質化や大強度化を実現すると言う，豊かな実りを手に出来る可能性もあり，この解説が，その端緒を開くことになれば幸いである．

ところで，シンクロトロンの加速理論がそのままサイクロトロンに適用出来る訳ではないので，運動を記述する用語もシンクロトロンのものとは若干異なる．そこで，用語を定義した後，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行くときの，二段階構成の，サイクロトロンの非線形加速理論を示す．

なお，シンクロトロンの加速理論も，改めて見直し

て見ると，そもそも，ここで言う二段階構成になっており，また，第二段階は二段階の過程で構成されている．このことから，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く，FFAG 加速器に代表される，シンクロ・サイクロトロンの加速理論も，二段階構成で，第二段階は二段階の過程で構成されていると考えられる．このように，二段階構成の加速理論は，円形高周波加速器であれば，その種類を問わず，いずれの加速器にも適用出来る一般的なものであり，この解説で，その例として，サイクロトロンの非線形加速理論を楽しんで頂き，他への適用の手掛かりとなれば，これまた，幸いである．

Ⅱ　渦巻き状軌道を描きながら加速されるサイクロトロンの非線形加速理論のための準備

Ⅱ.1　切っ掛けとしての不可思議で奇妙な現象

阪大核物セは全国共同利用研究機関で，加速器施設として，6 スパイラル・セクター分離型で K400 でフラット・トップ加速のリング・サイクロトロンを主加速器とし，3 スパイラル・セクター一体型で K140 の AVF サイクロトロンを入射器とする，カスケード・マシンがあり，いずれも可変エネルギー・可変粒子の性能を有している．中間エネルギー領域において，世界最高のエネルギー分解能で共同利用実験が推進されており，例えば，リング・サイクロトロンからの 400 MeV 陽子のエネルギー幅は 2×10^{-4} を上回っており，このビームと，大型高分解能反応粒子スペクトログラフ GRAND RAIDEN との，従来から確立されていた分散整合に加えて，ビーム輸送系の改造により実現出来るようになった，角度分散整合とにより，2×10^{-5} 程度のエネルギー分解能での測定が行える．

このような高品質ビームの生成と安定な供給は，磁場変動が鉄芯温度の変化により生じているとの，十年近く前の発見を契機として，二台のサイクロトロンの電磁石の鉄芯温度を安定化する作業に取り組み，磁場を長時間安定にした結果，数年前から，徐々に実現されて来た．最近では，鉄芯温度が一たび安定な状態に達すると，長期間，推定値ではあるが，その温度は 0.01℃ 程度の変動に保たれ，磁場の変動も 2 ppm 以内に収まっている．

ところで，鉄芯温度の安定化の作業は，リング・サイクロトロンでは比較的順調に推移したものの，AVF サイクロトロンでは，鉄芯と励磁コイルとの間の熱絶縁の設計方針がリングと異なるため，鉄芯温度を速い応答で制御することが困難で，励磁コイルの冷却系の見直しや改造に，営々として取り組むことになり，かなりの年月が必要と相成った．

その AVF の鉄芯温度の安定化作業に取り組み始めた頃，不可思議で奇妙な現象が起こった．392 MeV の陽子ビームのエネルギー幅を 80 keV に調整して GRAND RAIDEN での実験を始めたところ，数時間もすると，エネルギー幅が悪くなって来た．変化したものは何かと探して見たところ，64.63 MeV に加速している AVF の磁場が少し高くなっているのに気付いた．そこで，励磁電流を下げて見ると，元の 80 keV に戻った．そんなあるとき，300 keV と何と 3 倍以上に広がっていたが，磁場を何と僅か 2 ppm 程下げると，元の 80 keV 近くに戻った．こうした操作を数時間おきに繰り返したが，磁場が高くなっているのを下げたからと言って，同じ強さに戻った訳ではなく，磁場は，全体として，時間と共に下がる方向にあった．

この不可思議で奇妙な現象で問題にしたのは，エネルギー幅が，磁場の変動に対して非常に敏感であると同時に，磁場のずれの正負の符号に依存しており，単純には説明し難い，特に，磁場のずれに対する線形現象としては説明し難い現象であると言うことであった．

そこで，これを，磁場が低くなって負のずれが生じた場合には，エネルギー幅にはほとんど変化がないのに対して，磁場が高くなって 2 ppm 程度の正のずれが生じると，その平方根程度のエネルギー幅が生じる非線形現象と解釈した．これにより，粒子のエネルギーが transition energy に一致して一次の phase slip factor がゼロになるときには，位相の変化率の運動方程式においては，エネルギーのずれの線形一次の項が消えているものの，その二乗の項がリーディング・タームとして残っており，それと同時に，その式には，磁場のずれが含まれていると考えた．

この考えにより，磁場が低くなって負のずれが生じても，位相の変化率がゼロにならないのに対して，磁場が高くなって正のずれが生じた場合には，位相の変化率がゼロになる不動点が，二つのエネルギーのずれに対して生じ，しかも，その差は，磁場の正のずれの平方根に比例するので，非常に敏感であり，不可思議で奇妙な現象を説明出来る可能性が出て来た．

Ⅱ.2　用語の定義

高周波加速が行われているときの粒子の運動は，位置と向きとエネルギーと角速度と位相（高周波加速電圧に対する粒子の位相と定義する）の 5 つの変量で表わされる．このとき，エネルギーとローレンツ因子

とは等価であり，この解説では，多くの場合，ローレンツ因子の形で運動方程式を取り扱うので，エネルギーと言う用語に代えてローレンツ因子と言う用語を多用する．また，この解説では円柱座標系を用いるので，位置に等価な軌道半径あるいは動径，向きに等価な動径の変化率あるいは軌道半径の回転数による微分，一周あたりのエネルギーの増加に等価なローレンツ因子の変化率あるいはローレンツ因子の回転数による微分，と言う用語を多用する．

ところで，シンクロトロンの加速理論では，粒子の運動は，シンクロナス粒子に対する相対運動として，縦方向運動と横方向運動の重ね合わせになり，また，両者は分離出来る．どちらの運動も安定になる場合と不安定になる場合とがあり，前者の安定な非線形振動はシンクロトロン振動と呼ばれ，後者の安定な線形振動はベータトロン振動と呼ばれる．また，前者はゆっくりと円滑に変化する運動で，入射から取り出しまでの間に数千回程度振動し，後者は忙しく変化する運動で，一周当たり数回程度振動し，この変化の速さの違いで，両者を区別することが出来る．実際，この解説では，変化の速さの違いを利用して，両者を区別する．

ところで，縦方向運動では，位置と向きとエネルギーと角速度と位相の5つの変量が変化するのに対して，横方向運動では，エネルギーを除く，4つの変量が変化し，この違いが，二つの運動が分離出来るとする理由である．即ち，位相はゆっくりと円滑に変化することに加えて，忙しく変化するにも拘らず，エネルギーは忙しく変化することがなく，ゆっくりと円滑に変化するのみである．これは，位相が忙しく変化する結果，加速や減速が忙しく繰り返され，平均として加減速がなくなるためであるが，正しくは，シンクロトロンのように，一次の phase slip factor がノンゼロのときには，エネルギーは忙しく変化するものの，その振幅は無視出来る程小さくなるためである．

ところで，サイクロトロンの非線形加速理論の第二段階では，任意の磁場と加速電圧（周波数と振幅）の下での任意の粒子の運動を，二段階の過程を経て，二種類のずれの運動として求めるので，それを明示するために，ずれと言う用語を用いる．横方向ずれ運動は，縦方向ずれ運動からのずれの運動として求め，縦方向ずれ運動は，仮想的な基準の運動からのずれの運動として求める．このとき，それぞれの安定な運動を，シンクロトロンずれ振動とベータトロンずれ振動と呼ぶ．

ここで定義した縦方向ずれ運動とか横方向ずれ運動は，サイクロトロンで固有のものかと言うと，そうでもなく，シンクロトロンでも，こうした運動が存在している．

運動量がずれると，シンクロナス粒子とは異なる軌道となるため，その周長が変化してベータトロン振動のチューンがずれるが，これは，ベータトロン振動が変化したためであり，こんな場合は，ベータトロンずれ振動と呼びたい．しかし，運動量がずれていないシンクロナス粒子が存在し，その周りのベータトロン振動は元のままである．そのため，運動量にずれがあるときをベータトロンずれ振動と呼ぶには，いささか抵抗を感じるが，正しくは，そう呼ぶべきであるとしたい．

これに対して，偏向磁場がずれると，運動量に変化がなくても，その粒子の軌道が変化し，しかも，元々のシンクロナス粒子でさえ軌道が変化してしまうので，縦方向ずれ運動と呼ぶことが出来る．その上，元々のシンクロナス粒子の軌道とは異なる軌道となり，周長も変化するため，ベータトロンずれ振動も生じている．

ところで，このように偏向磁場がずれたときの運動を知るに際して注目すべき点は，元々のシンクロナス粒子の運動を基準にして，それからのずれの運動の運動方程式を解けば良いと言うことであり，ここで解説する，サイクロトロンの非線形加速理論は，それを踏襲したものである．

ところで，サイクロトロンで，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行くときの特殊な運動である仮想的な基準の運動は，仮想的な基準の磁場と加速電圧（周波数と振幅）の下では，どんなエネルギーであっても，等周期運動を行うとする．このとき，その他の粒子の仮想的な粒子に対する相対運動は，非線形運動となるため，等周期運動にはならず，しかも，安定な運動にはならないことが示される．そのため，仮想的な基準の状態でサイクロトロンを運転することはなく，安定な運動であるシンクロトロンずれ振動が起こるように，積極的に，仮想的な基準の磁場や加速電圧（周波数と振幅）からずれた状態で運転するのが一般的であると考え，敢えて，誤解のないように，仮想的と言う言葉を用いている．

Ⅱ.3　運動方程式一般論

1.　円柱座標系のときの解くべき運動方程式

ここでは，円柱座標系（r, θ, z）を採用し，$z=0$ の平面内の運動を取り扱うものとする．また，運動方程式は，通常，時間 t を独立変数としているが，ここでは，回転数 n を独立変数とし，

$$\frac{dn}{dt}=\frac{\dot{\theta}}{2\pi} \tag{1}$$

と言う関係を用いて，運動方程式を書き直す．ただし，$\dot{\theta}$は粒子の角速度である．また，回転数nによる微分は，簡単のため，ここでは，例えば，変量をXで代表させたとき，

$$\frac{dX}{dn}=X' \tag{2}$$

のように，プライム記号を用いることにする．

さて，磁場はz方向成分のみ存在するとし，また，動径rのみの関数とし，運動方程式を簡潔に表わすために，磁場の強さ$B_z(r)$に，粒子の電荷qを掛け，また，静止質量m_0で割った式

$$\omega_B(r)=-\frac{q}{m_0}B_z(r) \tag{3}$$

を用いることにする．ただし，これは角速度の単位となるが，簡単のため，この解説では，$\omega_B(r)$を磁場と呼ぶ．

また，高周波加速については，連続加速である波乗り加速とし，そのときの高周波電場は，動径方向成分E_rと，方位角方向成分E_θのベクトル和とする．

このとき，円柱座標系では，解くべき運動方程式は5つあり，いずれも参考書や教科書に出て来る一般的なもので，位相の変化率，ローレンツ因子の変化率，ローレンツ因子，ローレンツ力による運動方程式の動径方向成分，そして，同じく，運動方程式の方位角方向成分である．

$$\dot{\theta}=\frac{\omega_{rf}}{h}\frac{1}{1+\dfrac{1}{2\pi h}\phi'} \tag{4}$$

$$\gamma'=\frac{q}{m_0c^2}V\cos\phi \tag{5}$$

$$\dot{\theta}=c\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}}{\sqrt{r^2+\dfrac{1}{4\pi^2}r'^2}} \tag{6}$$

$$\gamma r\dot{\theta}-\frac{1}{4\pi^2}\gamma'r'\dot{\theta}-\frac{1}{4\pi^2}\gamma r''\dot{\theta}-\frac{1}{4\pi^2}\gamma r'\dot{\theta}'$$
$$=-\frac{q}{m_0\dot{\theta}}E_r+r\omega_B \tag{7}$$

$$2\gamma r'\dot{\theta}+\gamma'r\dot{\theta}+\gamma r\dot{\theta}'=\frac{2\pi q}{m_0\dot{\theta}}E_\theta+r'\omega_B \tag{8}$$

ところで，エネルギーのずれの運動が非線形になると主張しているときの根拠となる式は，(6)式の右辺の分子に現れる，ローレンツ因子を含む非線形の式の

$$\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

のことであり，単純には，エネルギー，即ち，ローレンツ因子のずれの二乗の形にはならないので，特に，断りのない限り，以下では，このままの形で取り扱う．

なお，(8)式は，サイクロトロンの加速理論で大活躍する，注目すべき式であり，これは，シンクロトロンの加速理論では利用する機会が少ない運動方程式である．

2. ローレンツ因子の変化率と電場との関係，及び，運動方程式の相互の関係

荷電粒子の加速は電場により行われることから，通常通り，(8)式×$r\dot{\theta}$−(7)式×$r'\dot{\theta}$を計算すると，ω_Bが消去され，また，(6)式の微分を代入して，

$$\gamma'=\frac{q}{m_0c^2}(r'E_r+2\pi rE_\theta) \tag{9}$$

を得る．

ところで，第一段階では，回転数により運動方程式を微分するが，嬉しいことに，回転数による微分に関しては，(6)式，(7)式，(8)式，(9)式が，相互に関係していることが知られる．即ち，(6)式を回転数で微分したときの式に現れるr''に，(7)式のr''を代入し，また，(7)式のE_rを，(9)式を用いて，E_θに書き直してやると，(8)式が得られる．

それにしても，このような関係があることに驚いたが，このことからして，運動方程式を微分するときには，(6)式の微分は既に済んでいて，(8)式で表わされていると考えて良く，しかも，この式には，磁場が含まれていることに加えて電場も含まれているので，粒子の運動を知る上で使い出のある式となり，再び，注目すべき式と言える．

3. 渦巻き状軌道を描くときの連続加速である波乗り加速の電場

サイクロトロンでは，渦巻き状軌道に沿って，複数の高周波加速装置が，従って，複数の加速間隙が，方位角方向に対称な位置に設けられていて，たとえ，ベータトロンずれ振動のチューンが整数になっても，また，整数に近くなっても，それが忙しい変化であるため，粒子が一周ないしは数周すると，位相のベータトロンずれ振動による加速と減速とが交互に起こっ

て，平均として加減速がなくなるとし，連続加速である波乗り加速のモデルが適用出来るとする．

このとき，波乗り加速においては，粒子の進行方向に一様な電場があるとし，一周当たりのローレンツ因子の変化率は，(5)式で与えられているので，これを，粒子が渦巻き状軌道に沿って一周したときの経路の長さで割れば，進行方向の電場が求まる．

しかし，(9)式の関係があるため，電場の動径方向成分 E_r と方位角方向成分 E_θ は，粒子の進行方向の向きを考えるだけで，ベクトル的に各成分に分解され，

$$E_r=\frac{r'}{r^2+\dfrac{1}{4\pi^2}r'^2}\frac{m_0c^2}{4\pi^2 q}\gamma'=\frac{r'\dot{\theta}^2}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\frac{m_0}{4\pi^2 q}\gamma' \tag{10}$$

$$E_\theta=\frac{r}{r^2+\dfrac{1}{4\pi^2}r'^2}\frac{m_0c^2}{2\pi q}\gamma'=\frac{r\dot{\theta}^2}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\frac{m_0}{2\pi q}\gamma' \tag{11}$$

のように，簡単に求まる．なお，右辺の最も右の式に変形するために(6)式を利用した．

これらの式から，一周当たりのローレンツ因子の変化率がほぼ一定のとき，渦巻き状軌道を描いているため，動径の変化率の r' がノンゼロであり，電場の動径方向成分 E_r がノンゼロになることが分かる．

また，これらの電場成分の動径や動径の変化率に対する依存性から，動径，即ち，軌道半径が大きくエネルギーが高いときは，電場は方位角方向成分が支配的になるが，それは，軌道が正円に近いためである．これに対して，軌道半径が小さくエネルギーが低いときは，電場は動径方向成分が支配的になるが，それは，軌道が正円から大きくゆがむためである．このような電場と軌道との間の関係は，シンクロトロンのように同一軌道上を周回しながら加速されるときにはなかったもので，渦巻き状軌道を描きながら加速されるサイクロトロン特有のものである．

4.　渦巻き状軌道を描くときの静磁場の回転数微分

静磁場を時間で微分すると，従って，静磁場を回転数で微分すると，ゼロになると思われ勝ちだが，渦巻き状軌道を描きながら加速されているため，動径の変化率 r' あるいはローレンツ因子の変化率 γ' がノンゼロとなるため，ノンゼロとなる．そのとき，静磁場の回転数微分は，独立変数を動径 r とするとき，あるいは，独立変数をローレンツ因子 γ とするとき，

$$\omega_B'=r'\frac{d\omega_B}{dr}=\gamma'\frac{d\omega_B}{d\gamma} \tag{12}$$

と与えられる．

この関係式から知られるように，第一段階で，仮想的な基準の磁場分布を求めるため，運動方程式を微分して得られる式は，動径あるいはローレンツ因子を独立変数とする磁場の微分方程式であり，それを解くことになる．

Ⅱ.4　運動方程式の変形と整理，及び，簡単な例題

1.　変形と整理

(7)式に(10)式を代入して整理し，また，(8)式に(11)式を代入して整理する．第一段階では，いずれ運動方程式を回転数で微分することもあり，また，前者には r'' が含まれているので，それに対応するように，後者の式を微分して r'' の項を作り出しておく．

これにより，運動方程式は6つとなる．

$$\dot{\theta}=\frac{\omega_{rf}}{h}\frac{1}{1+\dfrac{1}{2\pi h}\phi'} \tag{13}$$

$$\gamma'=\frac{q}{m_0c^2}V\cos\phi \tag{14}$$

$$\dot{\theta}=c\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}}{\sqrt{r^2+\dfrac{1}{4\pi^2}r'^2}} \tag{15}$$

$$r(\gamma\dot{\theta}-\omega_B)+\frac{1}{4\pi^2}\frac{\gamma' r'\dot{\theta}}{\gamma^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)}-\frac{1}{4\pi^2}\gamma r''\dot{\theta}$$
$$-\frac{1}{4\pi^2}\gamma r'\dot{\theta}'=0 \tag{16}$$

$$r'(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B)-\frac{\gamma' r\dot{\theta}}{\gamma^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)}+\gamma r\dot{\theta}'=0 \tag{17}$$

$$r''(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B)+r'\left(\frac{2-3\dfrac{1}{\gamma^2}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\gamma'\dot{\theta}+3\gamma\dot{\theta}'-\omega_B'\right)$$
$$+r\left\{2\frac{\gamma'^2\dot{\theta}}{\gamma^3\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)^2}+\frac{1-2\dfrac{1}{\gamma^2}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\gamma'\dot{\theta}'\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma''\dot{\theta}}{\gamma^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)}+\gamma\dot{\theta}''\right\}=0 \tag{18}$$

2.　寄り道：分かり易い例としてのシンクロトロン及び閉軌道のときのサイクロトロン

(13)式～(18)式の運動方程式は，特殊相対論で円

柱座標系のときのものを書き並べただけのものであり，円形高周波加速器であれば，その種類を問わず，いずれの加速器にも適用出来る．そこで，理解を助けるための分かり易い例として，ここで，寄り道をして，シンクロトロンのシンクロナス粒子の運動とサイクロトロンの閉軌道での運動を考えておく．

シンクロナス粒子は同一軌道上を周回するので，$r'=0$，$r''=0$ が成立する．また，加速位相は $\sin\phi_s$ である．

$$\gamma'=\frac{q}{m_0c^2}V\sin\phi_s \tag{19}$$

$$\dot{\theta}=\frac{c}{r}\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \tag{20}$$

$$\gamma\dot{\theta}=\omega_B \tag{21}$$

$$-\frac{\gamma'\dot{\theta}}{\gamma^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)}+\gamma\dot{\theta}'=0 \tag{22}$$

ここで，偏向電磁石の磁場の強さを B，曲率半径を ρ，平均半径を R, field index を k とすると，(3)式で定義した ω_B は

$$\omega_B=\frac{q}{m_0}\frac{\rho}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\mathrm{k}}B \tag{23}$$

と与えられる．ただし，field index は

$$k=-\frac{r}{\omega_B}\frac{d\omega_B}{dr} \tag{24}$$

と定義した．

さて，(22)式に角速度の回転数による微分の $\dot{\theta}'$ が含まれているので，(21)式を回転数で微分し，そのとき，(23)式を代入し，さらに，(19)式，(20)式を代入し，また，(1)式を用いて時間微分に戻すと，シンクロナス粒子に対して，良く知られている関係式

$$V\sin\phi_s=2\pi\rho R\dot{B} \tag{25}$$

を得る．

何のことはない，この関係式は，本来の運動方程式の(17)式，即ち，サイクロトロンの加速理論で大活躍する，注目すべき式の(8)式から求まるのである．その一方で，第Ⅱ.3節副節2で述べたように，(17)式は(15)式の微分，即ち，(8)式は(6)式の微分で求まると言う観点からは，シンクロトロンの加速理論も，そもそもは，運動方程式を時間で微分する操作が含まれていたことになる．これこそ，二段階構成の加速理論の第一段階である．

次に，サイクロトロンにおいて，加減速がなく，閉軌道を描いている場合を考える．このとき，シンクロトロンで成立していた $r'=0$，$r''=0$ に加えて，$\dot{\theta}=$一定，$\gamma'=0$ が成立するとして良い．これより，従来のサイクロトロンの加速理論で，良く知られている，等時性磁場分布

$$\omega_B=\gamma\dot{\theta}=\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{1-\dfrac{r^2\dot{\theta}^2}{c^2}}} \tag{26}$$

が，直ちに，求まる．

ここで示した手順からして，渦巻き状軌道を描いている場合を取り扱っている訳ではないので，この磁場分布には一般性はなく，限定された特殊な条件の下での解であることが分かる．従って，サイクロトロンでも，シンクロトロンの(25)式に匹敵する関係式を知るべきである．

Ⅲ　第一段階

Ⅲ.1　仮想的な基準を求めるための条件

1.　運動方程式を微分すると言う発想

第一段階では，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く粒子の特殊な運動を，仮想的な基準の運動と想定して，その運動を実現出来る，仮想的な基準の磁場と加速電圧（周波数と振幅）との関係式を求める．このとき，仮想的な基準の運動を前以て想定するので，通常は運動方程式を積分して解としての運動を求めるのに対して，その逆手をとって，運動方程式を微分し，そのとき得られる式を解くことにより，仮想的な基準の磁場と加速電圧（周波数と振幅）との関係を求める．

2.　仮想的な基準の運動の運動方程式と仮想的な基準の磁場分布を求める微分方程式

仮想的な基準の運動としては，微分するとゼロになる変量を含むのが望ましいので，角速度が一定，即ち，$\dot{\theta}=$一定で，ローレンツ因子の変化率が一定，即ち，$\gamma'=$一定であるとし，加速位相は0度，即ち，$\phi=0$ とする．これらの条件を満たすときの，全ての変量には，X_I のように添え字を付けることにすると，(12)式～(18)式は，以下のように，書き下すことが出来る．

$$\omega'_{BI}(r_I)=r'_I\frac{d\omega_{BI}(r_I)}{dr_I}=\gamma'_I\frac{d\omega_{BI}(\gamma_I)}{d\gamma_I} \tag{27}$$

$$\phi'_I=0=\omega_{rfI}-h\dot{\theta}_I \tag{28}$$

$$\gamma_I' = \frac{q}{m_0 c^2} V_I = 一定 \tag{29}$$

$$\dot{\theta}_I = c \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}}}{\sqrt{r_I^2 + \dfrac{1}{4\pi^2} r_I'^2}} = 一定 \tag{30}$$

$$r_I(\gamma_I\dot{\theta}_I - \omega_{BI}) + \frac{1}{4\pi^2}\frac{\gamma_I' r_I' \dot{\theta}_I}{\gamma_I^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)} - \frac{1}{4\pi^2}\gamma_I r_I'' \dot{\theta}_I = 0 \tag{31}$$

$$r_I'(2\gamma_I\dot{\theta}_I - \omega_{BI}) - \frac{\gamma_I' r_I \dot{\theta}_I}{\gamma_I^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)} = 0 \tag{32}$$

$$r_I''(2\gamma_I\dot{\theta}_I - \omega_{BI}) + r_I'\left(\frac{2-3\dfrac{1}{\gamma_I^2}}{1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}}\gamma_I'\dot{\theta}_I - \omega_{BI}'\right) + 2r_I \frac{\gamma_I'^2 \dot{\theta}_I}{\gamma_I^3\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)^2} = 0 \tag{33}$$

さて，(30)式～(33)式の4つの運動方程式には，一定値である $\dot{\theta}_I$ と γ_I' 以外には ω_{BI} とその微分 ω_{BI}' の他に，$\gamma_I, r_I'', r_I', r_I$ の4つの変量が含まれている．そこで，γ_I, r_I'', r_I' なる3つの変量を消去すると，ω_{BI} と $d\omega_{BI}/dr_I$ との関係式が r_I との関係により求まる．また，r_I'', r_I', r_I なる3つの変量を消去すると，ω_{BI} と $d\omega_{BI}/d\gamma_I$ との関係式が γ_I との関係により求まる．従って，独立変数が陽に現れる，ω_{BI} に対する一階常微分方程式が求まり，それを積分すれば，その解として，加速電圧で定まる γ_I' に応じて，磁場分布が求まり，仮想的な基準の磁場と加速電圧（周波数と振幅）との関係が求まる．

ここでは，独立変数がローレンツ因子のときの一階常微分方程式を示しておく．

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_{BI}}{d\gamma_I} &= \frac{4\pi^2}{\gamma_I'^2\dot{\theta}_I^2}\gamma_I\left(1-\frac{1}{\gamma_I^2}\right)(2\gamma_I\dot{\theta}_I-\omega_{BI})^3 \\ &\quad - \frac{4\pi^2}{\gamma_I'^2\dot{\theta}_I}\gamma_I^2\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)(2\gamma_I\dot{\theta}_I-\omega_{BI})^2 \\ &\quad + \frac{2+\dfrac{1}{\gamma_I^2}}{\gamma_I\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)}(2\gamma_I\dot{\theta}_I-\omega_{BI}) + \frac{2-3\dfrac{1}{\gamma_I^2}}{1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}}\dot{\theta}_I\end{aligned} \tag{34}$$

3.　お断り：内容的には同一ではあるものの見掛けは異なる解法との遭遇

研究現場の現状をさらけ出すようで恐縮ですが，(34)式の一階常微分方程式を積分して解を求めることが困難に思え，また，近似解を求めることも容易ではないと思い，後程述べる，第Ⅲ.2節では，(34)式を得る手順とは異なる手順に基づいて，ローレンツ因子の関数 $g(\gamma_I)$ を導入した．ところが，非常に幸運なことに，この関数は，近似に適した形をしており，実際，正しいとは言えない粗っぽいものではあるが，動径，動径の変化率，及び，磁場分布の近似解が求まった．

ところで，この関数 g は，(39)式の一階常微分方程式の解であり，一見したところ，(34)式とは異なるようであるが，(39)式の g を，(38)式により，磁場 ω_{BI} に置き換えると，(34)式と同じ一階常微分方程式になることを確認した．

当然，一方を選択し，統一した記述にすべきところ，未だ，整理が付かないため，混乱が避けられないが，二つの解法を併記させて頂く．

4.　仮想的な基準の磁場分布が一意的ではない問題

シンクロトロンにおいて，シンクロナス粒子が満たす，簡単に見える関係式，(25)式でさえ，同一軌道上を周回するからと言って，一意的に定まっている訳ではない．

同様に，サイクロトロンにおいても，仮想的な基準の磁場分布と加速電圧（周波数と振幅）との関係は一意的ではなく，さらに，(34)式の一階常微分方程式は非線形微分方程式である上，独立変数が陽に現れるので，初期条件により，異なる特解が定まることに加えて，安定になったり不安定になったりする可能性がある．

このとき，初期条件は，任意の動径あるいは任意のローレンツ因子に対する磁場の値として設定出来，その後の振る舞いは，微分方程式の解に任せることになる．

何分にも，今のところ，(34)式を睨み続けても，積分により解を求めることが出来ていないので，以下では，一般論に終始させて頂く．

一階常微分方程式の参考書や教科書を見れば，通常の微分方程式においては，解は存在し唯一であるとされているものの，初期条件に応じて，特解は無数に存在する．しかも，解を分類するに当たって，節点とか鞍点とか渦心点とか螺心点とかに分類される特異点があり，(34)式についても，特異点があるかも知れない．ところで，そうした特異点は，加速器における非線形振動の不動点に類似している気がする．ただ，加速器の場合，安定不動点と不安定不動点とがあって，セパラトリックスが形成されることがあるが，参考に

した一階常微分方程式の教科書や参考書が一般向けであるためか，それに相当する，同時に二つの特異点が存在する例が示されていなかった．しかし，解きたい微分方程式には，実際には，セパラトリックスが存在するのかも知れない．そうだとすると，安定不動点に相当する特異点での解を求めて，それを仮想的な基準の磁場分布とするのが最善であろう．

だからと言って，数値計算の助けを借りて，特異点を見つけ出し，そこでの解を求めるのは困難だと思われる．そんな場合には，結局，精度の高い近似式を求めるのが最善と思われる．

Ⅲ.2 粗っぽい近似により求まる磁場分布

1. 近似解を求めるための準備

独立変数をローレンツ因子 γ_I とする，(34)式の一階常微分方程式を解けば良いことからして，動径 r_I 及び動径の変化率 r'_I をローレンツ因子の関数と考えて良い．そこで，ローレンツ因子の関数 $g(\gamma_I)$ を導入し，それを用いて，(30)式を満たすように，動径及び動径の変化率を

$$r_I^2=\frac{c^2}{\dot{\theta}_I^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_I^2}\right)\frac{1}{g^2+1} \tag{35}$$

$$r_I'^2=4\pi^2\frac{c^2}{\dot{\theta}_I^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_I^2}\right)\frac{g^2}{g^2+1} \tag{36}$$

と与える．

これらの式，あるいは，それを回転数で微分した式，即ち，r_I, r'_I, r''_I を，(33)式を使わずに，(31)式及び(32)式の磁場を含む式に代入すると，g 及び g' を用いて，磁場に関する2つの式

$$2\gamma_I\dot{\theta}_I-\omega_{BI}=\gamma_I\dot{\theta}_I\frac{1}{1-\dfrac{\gamma_I^3}{\gamma'_I}\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)\dfrac{gg'}{g^2+1}} \tag{37}$$

$$2\gamma_I\dot{\theta}_I-\omega_{BI}=\gamma_I\dot{\theta}_I\frac{\gamma'_I}{2\pi\gamma_I^3\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)}\frac{1}{g} \tag{38}$$

が得られる．これらを連立させて，磁場 ω_{BI} を消去すると，独立変数をローレンツ因子 γ_I とする，g の一階常微分方程式

$$g\frac{dg}{d\gamma_I}+\frac{2\pi}{\gamma'_I}g(g^2+1)-\frac{1}{\gamma_I^3\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)}(g^2+1)=0 \tag{39}$$

を得る．ただし，独立変数を回転数からローレンツ因子に変換するに当たり，(12)式に相当する関係式

$$g'=\gamma'_I\frac{dg}{d\gamma_I} \tag{40}$$

を利用した．

ところで，r_I は(35)式により，また，r'_I は(36)式により，それぞれ g で与えられているので，当然，前者の微分が後者に等しくなるべきであるが，それより，やはり，(39)式の微分方程式が得られる．

ところで，第Ⅲ.1節副節3で既に断ったように，(39)式の一階常微分方程式の関数 g を，(38)式を用いて，磁場 ω_{BI} に書き換えると，(34)式の一階常微分方程式となる．従って，同じ式を与える，二つの解法があったことになる．

さて，g の振る舞いについては，第Ⅱ.3節副節3にあるように，軌道半径が大きくエネルギーが高いときの軌道は正円に近く，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの軌道は正円からゆがむので，(35)式と(36)式から，ローレンツ因子の関数 G を用いて，

$$g=\frac{\gamma'_I}{2\pi}\frac{1}{\gamma_I^3\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)^2}(1+G) \tag{41}$$

と表わして良いと思われる．ただし，G は，

$$G=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{a_N}{\gamma_I^{2N}} \tag{42}$$

と与えられると思われ，また，G は，エネルギーの全領域に対して，即ち，$1\leq\gamma_I\leq\infty$ において，有限でなければならない．ところで，g は(39)式の一階常微分方程式の解であることから，それを満たすように，(42)式の係数 a_N を定めれば良い．

さて，(41)式で導入した関数 G を用いて，動径，動径の変化率，磁場を表わすと，

$$r_I^2=\frac{c^2}{\dot{\theta}_I^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_I^2}\right)\frac{\gamma_I^6\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)^4}{\gamma_I^6\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)^4+\dfrac{\gamma_I'^2}{4\pi^2}(1+G)^2} \tag{43}$$

$$r_I'^2=4\pi^2\frac{c^2}{\dot{\theta}_I^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_I^2}\right)\frac{\dfrac{\gamma_I'^2}{4\pi^2}(1+G)^2}{\gamma_I^6\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)^4+\dfrac{\gamma_I'^2}{4\pi^2}(1+G)^2} \tag{44}$$

$$\omega_{BI}=\gamma_I\dot{\theta}_I\frac{1+\dfrac{1}{\gamma_I^2}+2G}{1+G} \tag{45}$$

となる．

これらの式から，極限での振る舞いが確定する．エネルギーが低い極限の $\gamma_I = 1$ のときは，G の値の如何に拘わらず，$r_I = 0$, $r'_I = 0$, $\omega_{BI} = 2\gamma_I \dot{\theta}_I$ が成立する．また，エネルギーが高い極限の $\gamma_I = \infty$ のときは，G の値の如何に拘わらず，$r_I = c/\dot{\theta}_I$, $r'_I = 0$ が成立し，さらに，(42)式より，$G = 0$ となるから，磁場は $\omega_{BI} = \gamma_I \dot{\theta}_I$ となる．

ところで，軌道半径がゼロのときの磁場の値は，従来の等時性磁場の(26)式の2倍になっているから，中心付近では，軌道半径が小さくなるに連れて，磁場が強くなることを示している．このような振る舞いは，(32)式，従って，(17)式，結局は，(8)式の効果であり，(8)式は，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行くときの，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの，磁場を求めるための，注目すべき式であることを，今回，初めて知った．

2.　$G = 0$ とする粗っぽい近似

ここでは，$G = 0$ を仮定して，(41)式の右辺の括弧内が1であると近似して，

$$g \approx \frac{\gamma'_I}{2\pi} \frac{1}{\gamma_I^3 \left(1 - \frac{1}{\gamma_I^2}\right)^2} \tag{46}$$

とする．このとき，(43)式～(45)式から，動径，動径の変化率，及び，磁場は，それぞれ，

$$r_I^2 = \frac{c^2}{\dot{\theta}_I^2} \frac{\left(1 - \frac{1}{\gamma_I^2}\right)^5}{\left(1 - \frac{1}{\gamma_I^2}\right)^4 + \frac{\gamma_I'^2}{4\pi^2} \frac{1}{\gamma_I^6}} \tag{47}$$

$$r_I'^2 = 4\pi^2 \frac{c^2}{\dot{\theta}_I^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_I^2}\right) \frac{\frac{\gamma_I'^2}{4\pi^2} \frac{1}{\gamma_I^6}}{\left(1 - \frac{1}{\gamma_I^2}\right)^4 + \frac{\gamma_I'^2}{4\pi^2} \frac{1}{\gamma_I^6}} \tag{48}$$

$$\omega_{BI} = \gamma_I \dot{\theta}_I \left(1 + \frac{1}{\gamma_I^2}\right) \tag{49}$$

となる．

以上のように求まった，動径，動径の変化率，磁場分布のいずれも，軌道半径が小さくエネルギーが低いときから，軌道半径が大きくエネルギーが高いときまで，それなりに統一出来ている，雰囲気のあるものとなっている．

ただし，(46)式の g は(39)式の微分方程式を満たしていないので，ここで求まった解は，正しいとは言えない粗っぽいものである．

3.　中心付近で磁場が強くなる理由

仮想的な基準の磁場が中心付近で強くなるのは，第Ⅱ.3節副節3で述べたことからして，合理的である．軌道半径が大きくエネルギーが高いときは，渦巻き状軌道も正円に近く，従って，閉軌道に類似しており，従来の磁場分布に近くなる．これに対して，軌道半径が小さくエネルギーが低いときは，正円からのゆがみが大きく，その渦巻き状軌道も，動径の変化率 r' が正であることからして，常に，正円に対して外向きの加速軌道になる．その結果，一周したときの走行距離は，正円の周長よりも長くなり，その一方で，周回するときの周期を同じに保ちたいので，その角速度が大きくなる必要があり，そのため，磁場を強くしなければならない．

この考えは，波乗り加速のときだけ成立するのではなく，加速間隙による衝撃的な加速の場合も成立するものと思われる．だからと言って，また，厳密さを好むからと言って，衝撃的な加速の下で，入射から取り出しまでの渦巻き状加速軌道を計算しようとしても，複雑な計算となり，実際上，それはほとんど不可能であろう．そこで，今回のサイクロトロンの非線形加速理論では，連続加速である波乗り加速の登場となっている次第である．

4.　従来のシミュレーション計算と近似的に求めた仮想的な基準との比較

サイクロトロンでは，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの粒子の運動は，中心領域での運動として，関心事の一つである．

ところが，粒子がサイクロトロンに入射され，高周波加速間隙に，初めて，到達したときの，動径と動径の変化率とローレンツ因子と角速度と位相の5つの変量の値を，初期条件と呼ぶことにすると，(47)式～(49)式の $\dot{\theta}_I$, γ'_I, ω_{BI}, r_I, r'_I を，これまでのサイクロトロンの中心領域での運動のシミュレーション計算での条件と一致させることは，かなり，難しいことが分かって来た．

これらの式は，仮想的な基準の運動に対するものであるから，一致する必要がなく，ずれがあれば，それこそ，今回のサイクロトロンの非線形加速理論の主旨からして，第二段階でずれの運動を求めれば良い訳であるが，それにしても，違いが大き過ぎる．

その原因の一つは，今回の物の考え方と従来のものとが異なる可能性がある点に求められる．今回は，軌道半径が小さくエネルギーが低いときは，軌道が正円からゆがんでいるとしているが，従来は，軌道が正円に近付くような条件を実現しようとしている．もちろ

ん，もう一つの原因は，(46)式の近似が良くない可能性がある．いずれにしろ，一日も早く，(34)式あるいは(39)式の一階常微分方程式の，近似式であっても，精度の高い解を知る必要がある．

なお，初期条件を設定するに際して，加速間隙に初めて到達したときの，位相の横方向ずれ運動の初期値は一般的にゼロであると考えるべきであるが，第一段階の仮想的な基準の運動においては，縦方向ずれ運動の位相の初期値としてはゼロの粒子を選ぶ必要がある．

Ⅳ　第二段階

Ⅳ.1　ずれの運動を求めるための準備

1.　二段階の過程

第二段階では，任意の磁場と加速電圧（周波数と振幅）の下での，任意の粒子の運動を求める．そのため，二段階の過程を経て，縦方向ずれ運動と横方向ずれ運動を求める．

第一番目の過程では，元々の運動方程式において，粒子の運動は，ゆっくりと円滑に変化する縦方向ずれ運動と，忙しく変化する横方向ずれ運動との重ね合わせとし，横方向ずれ運動は，縦方向ずれ運動からのずれの運動とする．これは，シンクロトロンの加速理論で言えば，ベータトロン振動をシンクロトロン振動からのずれの運動として求める過程である．このとき，二つの運動の変化の速さの違いを利用して，それぞれの運動方程式を求める．

第二番目の過程では，縦方向ずれ運動を，第一段階の仮想的な基準の運動からのずれとして，ずれの運動の運動方程式を求める．これは，シンクロトロンの加速理論で言えば，シンクロトロン振動をシンクロナス粒子の運動に対する相対運動として求める過程である．

こうして，横方向ずれ運動と縦方向ずれ運動のいずれに対しても，ずれの運動の運動方程式を得るが，いずれのずれも微小量として，適当な近似が適用出来るので，運動方程式が簡単化され，それを積分することにより，解くことが出来る．

このとき，縦方向ずれ運動は非線形運動になり，その結果，エネルギーは横方向ずれ運動しないことが知られ，二つの運動が分離出来ることになる．

2.　磁場と加速電圧（周波数と振幅）のずれ

磁場と加速電圧（周波数と振幅）を，第一段階の仮想的な基準からのずれとして定義するが，この解説では，これらのずれはいずれもゆっくりで円滑な変化のみとし，slow の頭文字を添え字として付けることにする．なお，ハーモニック磁場は忙しい変化のずれであり，また，フラット・トップはゆっくりと円滑な変化のずれであるが，この解説では，これらの取り扱いを割愛する．

$$\omega_B=\omega_{BI}+\Omega_{Bs},\ \omega_{rf}=\omega_{rfI}+\Omega_{rfs}\ \ V=V_I+v_s \tag{50}$$

3.　ずれ運動の運動方程式を定めるときの注意：物理？，それとも，計算上の技巧？

知りたい変量は $\phi, \dot{\theta}, \gamma, r$ の４つであるのに対して，解くべき運動方程式は，(13)式～(17)式の５つであり，変量の数より多い．これは矛盾かとつい思ってしまいそうだが，そうではなく，これらの式が微分方程式であるため，これらの式を変形整理して，一つの変量に対する微分方程式にすると，元々の式に現れる微分の階数よりも高いものとなるだけのことである．もっとも，一つの変量に対する微分方程式を得ようにも，非線形項が複雑に入れ混じって，実際には，それを示すことは不可能と思われる．

ところで，微分の階数が高くなったので，ゆっくりと円滑に変化する運動と忙しく変化する運動との重ねあわせと考えることが出来る．そこで，変化の速さの異なる運動に分離して運動方程式を定めたいが，その分離が出来たとして，それぞれの変化に対して，変量の個数は相変わらず４つであり，運動方程式の個数は５つであり，今度こそ，解くべき式が多過ぎることになる．

そこで，何かを無視して捨てたいが，(13)式～(17)式のままでは，いずれの式も捨てられない．これは困ったと思い悩んで来たが，変形整理した後，捨てることが出来るのに気付いた．その変形整理は，(16)式と(17)式の２つの式に対して行い，その方法には下記の３通りがある．

一つの方法は，２つの式に現れる γ' と $\dot{\theta}'$ の項を同時に消去することが出来るもので，(16)式 $\times r+$(17)式 $\times(1/4\pi^2)r'$ を計算すれば良い．もう一つの方法は，２つの式の左辺の最初の $\gamma\dot{\theta}$ の項を消去するもので，(16)式 $\times 2r'-$(17)式 $\times r$ を計算すれば良い．この場合は，もちろん，γ' と $\dot{\theta}'$ とが同時に残る．さらに，もう一つの方法は，２つの式から，ω_B を消去するもので，(16)式 $\times r'-$(17)式 $\times r$ を計算すれば良い．このとき得られる式は，磁場 ω_B を消去したのであるから，第Ⅱ.3節副節２で紹介したように，もちろん，(15)式，即ち，(6)式の微分である．この場合も，γ' と $\dot{\theta}'$ とが同時に残る．こうして得た３つの式は独立なものではなく，そのうちの２つを選べば良いが，γ' と $\dot{\theta}'$ とを含まない最初の式を選ぶのはもち

ろんのことであるが，両者を含む式については，取り扱い易さから見て，最後の式が良いと思われる．

ただし，ここで紹介したのは，今後，その場面に応じて実際に行う変形整理の方法の精神であって，ここで述べた通りに，前以って，運動方程式を変形整理しておくのは，誤りのもとであるので注意を要する．

以上により，式を無視したり捨てたりするための変形整理が出来たことになるが，それでも，うまく行かない場面に出会う．そんな場合は，これまた，精神であるが，r'' や r'，γ' や $\dot{\theta}'$ のような，高階微分の変量を無視し捨てることがあっても良い．

以上，変量の数より運動方程式の数が多く，その結果，変化の速さの異なる運動が存在すると考え，変化の速さが異なるそれぞれの運動を求めるに当たっては，その場合に応じて，変形整理した式の一部を無視し捨てるか，変量の高階微分の一部を無視し捨てるかの選択を行えば良いことになった．

ところで，(16)式$\times r+$(17)式$\times(1/4\pi^2)r'$を計算すると，ローレンツ因子の変化率 γ' が消えてなくなったが，このとき，加速電場の効果が消えてなくなっている．加速電場の効果を消し去った式には，ローレンツ因子の変化率が現れないとも言えるが，これは，物理なのか，それとも，計算上の技巧なのか，今のところ，迷っている．

4.　寄り道：シンクロトロンの加速理論に対する考察

第Ⅱ.3 節副節 1 では，(8)式の運動方程式はシンクロトロンの加速理論では利用する機会が少ないとし，また，第Ⅱ.3 節副節 3 では，連続加速である波乗り加速の電場を E_r と E_θ の二つの成分に分解するのはサイクロトロン特有であるとしたが，シンクロトロンの加速理論に適用出来ないとする特段の理由はなさそうである．

これらの 2 つの効果を含む運動方程式は(17)式であるが，位置にしろ，ローレンツ因子にしろ，角速度にしろ，1 階微分が含まれるのみであるので，運動の成長や減衰に一役買う可能性がある．従って，シンクロトロン振動が不安定になるような現象が起こる場合には，この運動方程式を考慮すべきかも知れない．

Ⅳ.2　第一番目の過程：縦方向ずれ運動からの横方向ずれ運動の分離

1.　縦方向ずれ運動が非線形運動になるときの横方向ずれ運動の運動方程式

粒子の運動は，ゆっくりと円滑に変化する縦方向ずれ運動と忙しく変化する横方向ずれ運動の重ね合わせであるとして，前者の変量には Longitudinal の頭文字を添え字として付け，後者の変量には β を添え字として付けることにすると，任意の粒子の 5 つの変量は，

$$\phi=\phi_L+\Phi_\beta,\ \dot{\theta}=\dot{\theta}_L+\dot{\Theta}_\beta,\ \gamma=\gamma_L+\Gamma_\beta,\\ r=r_L+R_\beta,\ r'=r'_L+R'_\beta \tag{51}$$

と与えられる．

ここで，縦方向ずれ運動が既知として，それからのずれとして，横方向ずれ運動を求める訳であるが，そのとき，解くべき運動方程式は 5 つあり，(13)式，(14)式，(15)式，及び，第Ⅳ.1 節副節 3 に述べた方法に倣って，(16)式$\times r_L+$(17)式$\times(1/4\pi^2)r'_L$，(16)式$\times r'_L-$(17)式$\times r_L$ であり，これらの式に(51)式を代入する．このとき，最後の式には，Γ'_β と $\dot{\Theta}'_\beta$ と言う微分量が含まれているが，この式そのものを無視して捨てることにする．残り 4 つの式において，(15)式の右辺の分母にある

$$\sqrt{1-\frac{1}{(\gamma_L+\Gamma_\beta)^2}}$$

の項が，縦方向ずれ運動を非線形運動として知ることと同じ意味で，Γ_β に関して非線形とすると．横方向ずれ運動においては，ローレンツ因子のずれ Γ_β は，忙しく変化する線形運動を行うことはないとして，

$$\Gamma_\beta\approx 0 \tag{52}$$

となることが知られる．その結果，横方向ずれ運動に対しては(14)式を解く必要がなくなり，解くべき運動方程式は 3 つとなる．

このように，$\Gamma_\beta\approx 0$ として良いことになったので，解くべき 3 つの運動方程式においては，非線形になる項がなく，$\Phi'_\beta, \dot{\Theta}_\beta, R_\beta, R'_\beta, R''_\beta$ の全てを線形一次で近似して良い．全ての変量が線形一次の関係になった結果，ゆっくりと円滑な変化と忙しい変化とに，簡単に切り分けることが出来，それぞれの運動方程式が直ちに求まる．このとき，(13)式に相当する式については，$\dot{\Theta}_\beta$ が求まれば Φ'_β が求まるとして良い．従って，$\dot{\Theta}_\beta$ が有意の振幅で横方向ずれ運動するとき，位相 Φ_β も有意の振幅で横方向ずれ運動する．即ち，位相は忙しく変化するが，$\Gamma_\beta\approx 0$ となるから，ローレンツ因子は忙しく変化することはない．

結局，(15)式，(16)式$\times r_L+$(17)式$\times(1/4\pi^2)r'_L$ に相当する 2 つの式において，$R''_\beta, R'_\beta, R_\beta$ の他に，$\omega_{BI}(r_I+R_\beta)+\Omega_{Bs}(r_I+R_\beta)$ と言う R_β の関数以外に，$\dot{\Theta}_\beta$ と言う変量が含まれるのみであり，これを消去すると，式が一つ残り，回転数を独立変数とする R_β の

2 階常微分方程式

$$R''_\beta+\frac{1}{\tau_\beta}R'_\beta+4\pi^2\nu_\beta^2R_\beta=0 \tag{53}$$

を得る．

これは，横方向ずれ運動の運動方程式であり，$\nu_\beta^2\geq 0$ で，$(1/\tau_\beta)=0$ のときには，純粋な線形振動のベータトロン振動になる．

しかし，$\nu_\beta^2\geq 0$ であっても，τ_β の正負の符号に応じて，減衰振動になったり成長振動になったりすることがある．また，$\nu_\beta^2\leq 0$ になると，安定な振動が存在出来なくなる．

ゆっくりと円滑に変化する縦方向ずれ運動の運動方程式として，(13)式～(17)式に相当する式をそれぞれ得るが，詳細は割愛する．

2. 補足：縦方向ずれ運動を線形一次で近似するときの横方向ずれ運動

縦方向ずれ運動を線形一次で近似するとき，一次の phase slip factor がノンゼロの場合，及び，ゼロになる場合で，横方向ずれ運動がどうなるかを，不正確になることは避けられないが，言葉で簡単に説明しておこう．

$$\sqrt{1-\frac{1}{(\gamma_L+\Gamma_\beta)^2}}$$

を Γ_β に関してテーラー展開し，その線形一次の

$$\frac{1}{\gamma_L^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma_L^2}\right)}\frac{\Gamma_\beta}{\gamma_L}$$

で近似し，さらに，加速位相の $cos\,(\phi_L+\Phi_\beta)$ についても線形一次の近似を行い，この Γ_β と Φ_β 及び $\dot{\Theta}_\beta$ を消去すると，R_β の 4 階常微分方程式を得る．

このとき，一次の phase slip factor がノンゼロの場合は，この 4 階常微分方程式はゆっくりと円滑な変化と忙しい変化とを与える．しかし，ここでは，忙しい変化を求めているので，そのときの解である Γ_β は忙しく変化するものの，その振幅は無視出来るほど小さくなることが知られる．従って，$\Gamma_\beta\approx 0$ が成立するとして良く，その結果，横方向ずれ運動の運動方程式として，(53)式と同じ形の，R_β の 2 階常微分方程式を得る．

これに対して，一次の phase slip factor がゼロの場合には，4 階常微分方程式は，R_β の項，R'_β の項，さらに，R''_β の項の一部が現れないものになる．即ち，R_β の 2 階常微分方程式をさらに 2 階微分したものがゼロとなる，4 階常微分方程式になる．その結果，Γ_β は，有意の振幅で，忙しく変化することになる．

ところで，話はこれで終わりにはならず，こうなると，変量のずれの全てを線形一次の項のみで近似したこと自体を見直す必要が生じる．有意の振幅の，Γ_β, R_β, $\dot{\Theta}_\beta$ は，同位相で忙しく変化し，元々の解くべき運動方程式には，これらの積である二次の項が元々存在している．同位相で忙しく変化する二つの変量の積からは，ゆっくりと円滑に変化する項が発生するので，(51)式の γ_L の値が，Γ_β, R_β, $\dot{\Theta}_\beta$ の振幅の大きさに応じて異なる，結合運動が生じることになる．

見て来たような嘘を吐いているのかも知れないが，微小量の積である二次の項を通して結合運動が存在するとなると，その運動を全体として正確に知ることはかなり難しくなってくる．これに対して，前副節のように，Γ_β の非線形項を残すことによって，縦方向ずれ運動と横方向ずれ運動とが分離出来るとするのは分かり易いと言えよう．

Ⅳ.3 第二番目の過程：仮想的な基準の運動からのずれである縦方向ずれ運動

1. 縦方向ずれ運動のずれの運動としての運動方程式

縦方向ずれ運動では，位置と向きとローレンツ因子と角速度と位相の 5 つの全ての変量がゆっくりと円滑に変化しているが，第一段階の仮想的な基準の運動も，もちろん，ゆっくりと円滑に変化している．そこで，縦方向ずれ運動は，第一段階の仮想的な基準の運動からのずれの運動と定義する．

$$\begin{aligned}&\phi_L=\phi_I+\Phi_L,\ \dot{\theta}_L=\dot{\theta}_I+\dot{\Theta}_L,\ \gamma_L=\gamma_I+\Gamma_L,\\ &r_L=r_I+R_L,\ r'_L=r'_I+R'_L\end{aligned} \tag{54}$$

ここで，左辺は縦方向ずれ運動を表し，右辺の小文字は仮想的な基準の運動を表し，大文字はそこからのずれとしての縦方向ずれ運動を表す．もちろん，第一段階の仮想的な基準の運動は，(27)式～(33)式の運動方程式を満たしている．

この(54)式を，第一番目の過程で得た，しかし，割愛して示さなかった(13)式～(17)式のそれぞれに相当する，ゆっくりと円滑に変化する運動の，5 つの運動方程式に代入する訳であるが，実際には，(16)式と(17)式については，第Ⅳ.1 節副節 3 で紹介した方法に倣って，(16)式 $\times r_I+$ (17)式 $\times(1/4\pi^2)r'_I$, (16)式 $\times r'_I-$ (17)式 $\times r_I$ と変形整理した式を用いる．

これらの運動方程式に基づいて縦方向ずれ運動を求めるに当たっては，これら 5 つの運動方程式のいずれも無視し捨てることなく，第Ⅳ.1 節副節 3 で述べ

た方法のうち，変量の高階微分の一部を無視し捨てる方法を適用する．

そのとき，(15)式に相当する式の右辺の分子の

$$\sqrt{1-\frac{1}{(\gamma_I+\Gamma_L)^2}}$$

の項を，Γ_L に対して非線形の形のまま取り扱い，それ以外の運動方程式においては，Γ_L を含めて，すべてのずれを線形一次で近似する．

このとき，縦方向ずれ運動の大雑把な特徴は，(13)式と(14)式のそれぞれに相当する式

$$\frac{1}{2\pi h}\Phi'_L=-\frac{\omega_{rfI}}{\omega_{rfI}+\Omega_{rfs}}\frac{\dot{\Theta}_L}{\dot{\theta}_I}+\frac{\Omega_{rfs}}{\omega_{rfI}} \tag{55}$$

$$\Gamma'_L=\frac{q}{m_0c^2}V_I\left\{\left(1+\frac{v_s}{V_I}\right)\cos\Phi_L-1\right\} \tag{56}$$

で，原理的な振る舞いが，支配されていることである．即ち，縦方向ずれ運動は，Φ_L と Γ_L との一階の連立常微分方程式として求まれば良いが，(56)式は既にそれを満たしているので，結局，(55)式に現れる $\dot{\Theta}_L$ を Γ_L の関数として，残り3つの式から求めれば良い．

ところが，この3つの式には，$\dot{\Theta}_L, \Gamma_L, R_L, R'_L$ の他に，$\omega_{BI}(r_I+R_L)+\Omega_{Bs}(r_I+R_L)$ と言う R_L の関数以外に，$\Gamma'_L, \dot{\Theta}'_L, R''_L$ が含まれている．しかし，(55)式と(56)式とを，一階の連立常微分方程式にするためには，はっきり言って，これら3つの微分された変量は邪魔者である．また，これらは縦方向ずれ運動の微分方程式の階数を高くすることもあり，それを避けるためにも，縦方向ずれ運動はゆっくりと円滑に変化する運動であるとして，これらを無視し，ゼロと近似する．

結局，(15)，(16)式×r_I+(17)式×$(1/4\pi^2)r'_I$，(16)式×r'_I−(17)式×r_I に相当する3つの式には，$\dot{\Theta}_L, \Gamma_L, R'_L, R_L$ と言う4つの変量が含まれることになる．ところで，Γ_L については非線形項が含まれているものの，$\dot{\Theta}_L, R'_L, R_L$ については線形一次の項のみであるから，3つの式は，これらを未知数とする連立一次方程式と考えることが出来る．その結果，$R'_L, R_L, \dot{\Theta}_L$ を Γ_L の関数として求めることが出来る．

$\dot{\Theta}_L$ が Γ_L の関数として求めたので，それを(55)式に代入して，加速位相だけではなく，ローレンツ因子のずれに対しても，非線形になる，一階の連立常微分方程式

$$\frac{1}{2\pi h}\Phi'_L=A_L\frac{\Gamma_L}{\gamma_I}+B_L\frac{\sqrt{1-\frac{1}{(\gamma_I+\Gamma_L)^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_I^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_I^2}}}+C_L \tag{57}$$

$$\Gamma'_L=\frac{q}{m_0c^2}V_I\left\{\left(1+\frac{v_s}{V_I}\right)\cos\Phi_L-1\right\} \tag{58}$$

を得る．

係数の A_L, B_L, C_L は，サイクロトロンでは，シンクロトロンと違って，$r'_I\neq 0, r''_I\neq 0$ であり，かつ，軌道半径が大きくエネルギーが高いときの運動方程式と，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの運動方程式の影響を受けており，非常に複雑である．現時点では，A_L, B_L, C_L の見通しの良い表式を得ていないので，詳細は割愛する．

(57)式と(58)式とを用いると，横軸が Φ_L で，縦軸が Γ_L の位相空間での粒子の運動を描くことが出来，また，運動の定数として，縦方向ずれ運動のエネルギー，即ち，ハミルトニアンを求めることが出来る．また，非線形振動であるシンクロトロンずれ振動が起こる場合には，作用変数が求まり，それを断熱不変量とすることが出来る．しかし，この解説では，ハミルトニアンや作用変数の詳細を割愛する．

2. 検討を要する課題他

上に述べた解法からすると，R_L と R'_L とは，それぞれ独立に，Γ_L により与えられることになる．R'_L は R_L を微分したものであるから，お互いに無関係に定まるとするのも何だか違和感がある．その一方で，R_L に関する運動方程式を直接解くことはないのでお互いに独立と考えて良い気もする．また，これらの関係式を用いて縦方向ずれ運動の運動方程式を積分して解を求めるので，結果として，微分関係が成立している気もして，その可否が判然としない．検討を要する．

なお，シンクロトロンの加速理論では，元々解くべき式の数が一つ少なく，それに伴って，R'_L を無視し捨てるので，R_L のみとなり，まぎれがない解法になっている．

さて，解くべき運動方程式として，Γ'_L と $\dot{\Theta}'_L$ を含む，(16)式×r'_I−(17)式×r_I を選び，$\Gamma'_L=0, \dot{\Theta}'_L=0, R''_L=0$ として，これらを無視し捨てたが，それに代えて，(16)式×$2r'_I$−(17)式×r_I を選ぶことも出来る．この場合，R_L と R'_L の $\dot{\Theta}_L$ と Γ_L との関係式におい

て，その係数が変化して，異なる結果に導く心配があるが，残りの式が，それを補ってくれるので，その心配は杞憂のようである．

3. 寄り道：特殊相対論と非相対論

軌道半径が小さくエネルギーが低いときでも，軌道半径が大きくエネルギーが高いときでも，位相の変化率の運動方程式が(57)式で与えられることになったので，ここで，寄り道をして，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの，特殊相対論と非相対論の運動方程式の違いについて，考察しておこう．

軌道半径が小さくエネルギーが低いときには，非相対論が適用出来るとされている．そこで，ここまでと同じ手順を踏んで，縦方向ずれ運動の運動方程式を求めてみたが，(57)式と振る舞いが異なることが判明した．非相対論の場合，(57)式の右辺の第2項のΓ_Lの非線形項に相当する項が出て来るものの，第1項のΓ_Lに比例する項が全く出て来ない．そうなると，たとえ，右辺の第2項を，エネルギーのずれの線形一次で近似するとしても，一次の phase slip factor に相当する係数がゼロになることがなく，仮想的な基準の運動の周りに，等時性運動を行う粒子が全くないことになる．

非相対論で，等時性運動が存在し，従って，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの粒子の運動が良く分かっていた積もりなのに，何だか訳の分からないことになって来た．これは，特殊相対論で言う等時性運動と非相対論で言う等時性運動の内容が異なり，また，何らかの基準とする運動からのずれとして，他の粒子の運動を知ると言う手順が，実は，非常に精密なもので，粒子の運動を，まるで，顕微鏡で拡大して眺めていることになっているからではないだろうか．

なお，相対論の場合，(57)式の右辺の第1項にΓ_Lに比例する項が出て来る根本を質せば，(7)式の左辺の第1項，第3項，第4項に，また，(8)式の左辺の第1項，第3項に，ローレンツ因子γが現れることに因っている．非相対論では，ローレンツ因子に相当するエネルギーが左辺に現れることがないため，(57)式の右辺の第1項に相当する項がないのである．

それにしても，非相対論にはこうした限界があるとなると，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの運動であっても，顕微鏡で拡大して見る限り，非相対論の結果を拡大解釈して物事を考えるのは危険である．

V 軌道半径が大きくエネルギーが高いときのシンクロトロンずれ振動

V.1 近似のための条件

1. 近似によるずれの運動の運動方程式の変形と整理

軌道半径が大きくエネルギーが高いとき，さらに，$r_I'\approx 0, r_I''\approx 0, E_r\approx 0, \omega_{BI}\approx\gamma_I\dot{\theta}_I$が成立すると近似した場合，この条件は，第Ⅱ.4節副節2に示したシンクロトロンの場合とほぼ一致するので，以下の運動方程式は，シンクロトロンで transition energy での運動を解くことに相当する．

このときは(16)式の運動方程式を解くことになるので，ここで，通常の field index と transition energy をそれぞれ定義しておくのが分かり易い．

$$K_B=-\frac{r}{\omega_{BI}+\Omega_{Bs}}\left(\frac{d\omega_{BI}}{dr}+\frac{d\Omega_{Bs}}{dr}\right) \tag{59}$$

$$\gamma_T^2=\frac{\omega_{BI}+\Omega_{Bs}}{\omega_{BI}}(1-K_B)\neq 1-K_B \tag{60}$$

これらを用いて，縦方向ずれ運動の一階の連立常微分方程式は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\eta}\Phi_L'=&\frac{1}{\gamma_T^2}\frac{\Gamma_L}{\gamma_I}-\left(1-\frac{1}{\gamma_T^2}\right)\\&\times\frac{\sqrt{1-\frac{1}{(\gamma_I+\Gamma_L)^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_I^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_I^2}}}\\&+\frac{\Omega_{rfs}}{\omega_{rfI}}-\frac{1}{\gamma_T^2}\frac{\Omega_{Bs}}{\omega_{BI}}\end{aligned} \tag{61}$$

$$\Gamma_L'=\gamma_I'\left\{\left(1+\frac{v_s}{V_I}\right)\cos\Phi_L-1\right\} \tag{62}$$

と書ける．

また，横方向ずれ運動の運動方程式は，

$$R_\beta''+\left\{\frac{\dot{\theta}_L'}{\dot{\theta}_L}-\frac{1}{\gamma_L^2\left(1-\frac{1}{\gamma_L^2}\right)}\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}\right\}R_\beta'+4\pi^2(1-K_B)R_\beta=0 \tag{63}$$

と書ける．

2. 非線形項のΓ_Lの冪級数展開は，その二乗Γ_L^2までのこと

(61)式において，$\Phi_L'=0$が成立する不動点の個数は，Γ_Lの非線形関数の形からして，2個以上はないことが知られる．従って，非線形項の冪級数展開は

Γ_L^2 以下に限られる．ただし，その適用範囲には十分注意すべきであって，何でもかんでも Γ_L^2 で議論するのは危険である．しかし，Γ_L^3 とすると，もっと，危険である．

ところで，シンクロトロンにおいても，シンクロナス粒子のエネルギーが transition energy に近いときには同じ条件を課す必要があり，冪級数展開する場合は Γ_L^2 以下とすべきである．このような条件は，サイクロトロンの非線形加速理論で，不動点の個数の検討から知られるところとなった．

3.　ベータトロンずれ振動が減衰振動になったり成長振動になる可能性

(63)式において，$\nu_\beta^2=1-K_B$ が正のとき，

$$\frac{1}{\tau_\beta}=\frac{\dot{\theta}_L'}{\dot{\theta}_L}-\frac{1}{\gamma_L^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma_L^2}\right)}\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}$$

が，縦方向ずれ運動の状態によっては，正になったり負になったりする可能性がある．正になるとベータトロンずれ振動は減衰振動になり，負になると成長振動になる．しかも，ベータトロンずれ振動の基準になっているのは，個々の粒子の縦方向ずれ運動であり，それは粒子によって異なると考えられるので，ベータトロンずれ振動が異なることになる．

成長振動が必ずしも悪い訳ではない．ハーモニック磁場で強制的に横方向ずれ運動をキックする場合には，成長振動のときには，効率良く，振幅が成長するからである．

4.　縦方向ずれ運動の多種多様で数多い運動の様態

(61)式からすると，不動点の有り無しと関連して，実に多種多様で数多い運動の様態が発生することになる．

(61)式において，γ_T^2 と γ_I^2 とが大小関係を競い合うであろうし，加速電圧の振幅のずれ，ν_s が，正，ゼロ，負の3通りあり，

$$\frac{1}{\gamma_T^2}\frac{\Omega_{Bs}}{\omega_{BI}}-\frac{\Omega_{rfs}}{\omega_{rfI}}$$

が，正，ゼロ，負の3通りあり，これらを組み合わせただけで，27通りの運動の様態がある．これは少し甘い評価で，加速電圧の周波数のずれの Ω_{rfs} を独立と考えると81通りかも知れないし，45通りの気もする．

このように，実に数多い多種多様な運動の様態が発生し，これが，今以って，非線形運動の全容を把握出来ない理由である．

V.2　粗っぽい近似の下でのシンクロトロンずれ振動

1.　Γ_L^2 までの冪級数展開とする近似

(61)式のローレンツ因子を含む非線形項を，冪級数展開して，Γ_L と Γ_L^2 の項まで採用すると，

$$\frac{1}{2\pi h}\Phi_L'=-\frac{1}{1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}}\left(\frac{1}{\gamma_I^2}-\frac{1}{\gamma_T^2}\right)\frac{\Gamma_L}{\gamma_I}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma_T^2}\right)\frac{3-2\dfrac{1}{\gamma_I^2}}{\gamma_I^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)^2}\left(\frac{\Gamma_L}{\gamma_I}\right)^2+\frac{\Omega_{rfs}}{\omega_{rfI}}-\frac{1}{\gamma_T^2}\frac{\Omega_{Bs}}{\omega_{BI}} \tag{64}$$

となる．ここで，右辺の第一項 Γ_L/γ_I の係数は，一次の phase slip factor であり，

$$一次のphase\ slip\ factor\propto\left(\frac{1}{\gamma_I^2}-\frac{1}{\gamma_T^2}\right) \tag{65}$$

と与えられる．

2.　さらなる近似

正しくは(61)式で，少なくとも(64)式で，詳細を検討すべきであろうが，それでも，まだまだ，複雑である．そこで，ここでは，さらに簡単化して，次の近似

$$\gamma_T^2=\gamma_I^2,\ \Omega_{rfs}=0 \tag{66}$$

を導入する．

このとき，一次の phase slip factor はゼロとなるので，(64)式は簡単化され，(62)式と合わせ，縦方向ずれ運動の一階の連立常微分方程式は

$$\frac{1}{2\pi h}\Phi_L'=\frac{3-2\dfrac{1}{\gamma_I^2}}{2\gamma_I^4\left(1-\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)}\Gamma_L^2-\frac{1}{\gamma_I^2}\frac{\Omega_{Bs}}{\omega_{BI}} \tag{67}$$

$$\Gamma_L'=\gamma_I'\left\{\left(1+\frac{\nu_s}{V_I}\right)\cos\Phi_L-1\right\} \tag{68}$$

となる．

3.　シンクロトロンずれ振動とその定量的な評価

(67)式において，磁場のずれが正，即ち，$\Omega_{Bs}\geq 0$ のとき，それと同時に，(68)式において，加速電圧の振幅のずれが正，即ち，$\nu_s\geq 0$ のとき，不動点が合計4個発生する．

このとき，安定不動点は二つあり，不安定不動点は

二つあり，一つの安定不動点の周りの安定領域を取り囲むセパラトリックスがそれぞれあって，合計2つの安定領域がある．

このとき，$\Phi'_L=0$ になるローレンツ因子の正負二つのずれを，それぞれ，Γ_{Lu}, Γ_{Ll} とし，その差を $\Delta\Gamma_L$ と表わして，それを（γ_I-1）で割れば，二つの不動点の間のエネルギーの間隔，ΔE は，

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\Delta\Gamma_L}{\gamma_I-1}=\frac{\Gamma_{Lu}}{\gamma_I-1}=2\sqrt{2\frac{\gamma_I+1}{(\gamma_I-1)\left(3-2\dfrac{1}{\gamma_I^2}\right)}\frac{\Omega_{Bs}}{\omega_{BI}}} \tag{69}$$

と与えられる．

この式に基づいて，数値的に評価してみると，64.63 MeV の陽子で，磁場が高くなって正に2 ppm ずれると，$\Delta E/E=0.0196$ となり，僅かな磁場のずれにも拘わらず，それに敏感で，$\Delta E=1.267$ MeV と非常に大きな値になる．

もちろん，ここで計算したのは，一つの安定領域のエネルギーのずれの高さではなく，二つの安定領域の安定不動点の間のエネルギーの離れの大きさである．

第Ⅱ.1節で紹介した不可思議で奇妙な現象では，エネルギー幅は300 keV であり，これに対して，不動点の間隔は，その4倍近くになっており，一体全体何が起きたのかの詳細は今以って不明であるものの，非線形加速理論が進歩すれば，いずれは，こうした現象も理解出来ると思われる．

4.　磁場の正のずれの功罪

磁場のずれが正になってシンクロトロンずれ振動が起こると，粒子の集群は塊を作って安定に加速され，望ましい状態である．もしかすると，オペレータは，サイクロトロンの運転やビーム調整において，知らず知らずのうちに，粒子の集群が安定に振舞うように，従って，シンクロトロンずれ振動が起こるように，各種の運転パラメータを設定し調整しているのかも知れない．言い換えれば，安定不動点や不安定不動点を作り出している訳である．

これに対して，磁場が正にずれたとき，第Ⅱ.1節で紹介した，不可思議で奇妙な現象が観測された．即ち，磁場が正にずれて，シンクロトロンずれ振動が起こると，前節で定量的に示したように，その磁場のずれに非常に敏感に，取り出しビームのエネルギー幅が広くなって，悪くなる．

ところで，この敏感さを嫌って，大きなセパラトリックスを生成しておいてやれば，運転が楽になると思われるが，その一方で，取り出しビームのエネルギー幅が広くなる．徹底した磁場の安定化が実現されていない場合には，こうした運転が行われている可能性が高く，これが，世界の多くのサイクロトロンの取り出しビームのエネルギー幅が $\Delta E/E\approx1\times10^{-3}$ 程度になっている一因かも知れない．

このように，良いことと悪いこととのせめぎ合いのようであり，観測と数値から推測して，磁場の変化は1 ppm を切る程度に安定化する必要がありそうで，阪大核物セでは，それを実現しつつあるのではないかと思われる．

5.　シンクロトロンずれ振動の振る舞い

現時点では，非線形加速理論の全容が把握出来ていないこともあり，シンクロトロンずれ振動の詳細も説明出来ないが，ここでは，定量性には拘泥せず，定性的な振る舞いを議論しておく．

サイクロトロンは元々等時性サイクロトロンと呼ばれていることからして，シンクロトロンずれ振動が起こるとしても，エネルギーのずれと位相の振動とは非常にゆっくりとしており，入射から取り出しまでの間のシンクロトロンずれ振動の回数は，シンクロトロンの場合の数千回よりもはるかに少なく，恐らく，一回よりも少ないものと思われる．

しかも，サイクロトロンでは，シンクロトロンずれ振動が起こると，二つある安定不動点の周りにセパラトリックスで囲まれた二つの安定領域が，エネルギー的にも位相的にも，ごく近傍に発生し，その一方に，粒子の集群が閉じ込められているとの保証はなさそうである．ましてや，一方の安定領域の中を一杯に，粒子の集群が占めて運動していることはなさそうである．粒子の集群は，一方の安定領域の中を運動することが望ましいが，そう出来たとしても，安定領域の一部を，しかも，安定不動点から離れたところに局在し，運動すると考えられる．その結果，安定不動点から外れた，バンチ回転のような運動を行うであろう．

このように，シンクロトロンずれ振動の回数が少ない場合には，位相空間での，入射での位置と向きと，取り出しでの位置と向きとの制御が，取り出しビームの品質に大きく影響することが考えられる．例えば，位相空間の安定領域において，安定不動点の真下に入射して，その真横から取り出すと，高品質のビームが実現されるかも知れない．このとき，ビームの位相は，入射から取り出しに向けて，ゆっくりと円滑に変化して行くことになる．しかも，ベータトロンずれ振動が，シンクロトロンずれ振動の影響を受けて，減衰振動あるいは成長振動になることもあって，取り出しビームの品質に影響する可能性もある．

Ⅵ　纏めと議論

この数年間でただ一度だけ観測にかかった不可思議で奇妙な現象を切っ掛けとして，それを理解するため，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行くサイクロトロンでは，等時性運動とか，粒子のエネルギーが transition energy に一致して一次の phase slip factor がゼロになるときには，エネルギーのずれを非線形の形で考慮すべきであると同時に，磁場や加速電圧（周波数と振幅）のずれを取り扱うべきであるとして，その非線形加速理論が二段階構成で構築出来ることを示した．

その結果，第一段階では，まだ粗っぽい近似で正しいとは言えないものではあるが，渦巻き状軌道を描きながら加速されて行くときの，仮想的な基準の運動を実現出来る，仮想的な基準の磁場分布を，軌道半径が小さくエネルギーが低いときから軌道半径が大きくエネルギーが高いときまでに対して，統一した形で求まることを示した．

さらに，第二段階では，任意の磁場と加速電圧（周波数と振幅）の下での任意の粒子の運動は，縦方向ずれ運動と横方向ずれ運動との重ね合わせとなり，それぞれの運動方程式は，シンクロトロンの加速理論の縦方向運動と横方向運動の運動方程式を一般化した形で，特に，縦方向ずれ運動については，エネルギーのずれに対して非線形の形で求まった．

そのとき，シンクロトロンでは，一次の phase slip factor がノンゼロのため，エネルギーは縦方向運動するものの横方向運動せず，二つの運動が分離されたが，サイクロトロンでは，縦方向ずれ運動が非線形運動となるため，エネルギーは縦方向ずれ運動するものの横方向ずれ運動しないことになり，二つの運動が分離出来ることが分かった．

ところで，軌道半径が大きくエネルギーが高いとき，特殊な条件の下では，シンクロトロンずれ振動が起こることを示したが，様々の条件に応じて，非線形運動である縦方向ずれ運動では多種多様で非常に数多くの運動の様態が発生し，現時点では，その全容を把握出来ておらず，それを知ることは今後の課題である．

特に，軌道半径が小さくエネルギーが低いときの運動の様態を解明することは急務である．第一段階で近似的に求めた仮想的な基準の磁場分布によれば，軌道半径が小さくエネルギーが低い中心付近では，磁場が強くなる．しかし，実際のサイクロトロンでは，そこまで強く出来ない可能性があり，安定不動点を持たない非線形運動が起こるかも知れない．この運動は，シンクロトロンのコースティング・ビームを一般化したような，これまで知られていなかった運動の様態である．

ところで，シンクロトロンずれ振動では，粒子の集群が塊を作って安定に加速されるので，少なくとも，軌道半径が大きくエネルギーが高いときには，シンクロトロンずれ振動が実現されるように，また，安定領域の中に粒子の集群が存在するように，サイクロトロンを運転すべきであろう．

これに対して，軌道半径が小さくエネルギーが低いとき，安定不動点を持たない非線形運動が起こるとすれば，加速と共に，その運動をシンクロトロンずれ振動に持ち込む必要があり，それは，シンクロトロンの高周波捕獲に相当する過程である．このときの高周波捕獲は，断熱捕獲とする訳には行かず，その制御は難しいであろうが，その最適化は，やりがいのある挑戦になると思われる．

とにかく，運動の様態が多種多様で数多く，また，磁場や加速電圧の僅かな変動に対しても非常に敏感に反応して変化するので，複雑ではあるが，意外な展開が待ち構えている可能性もあり，大強度の高品質ビームが実現出来る方法が見付かることになれば，幸いである．

さて，この解説では割愛した，忙しい変化のずれであるハーモニック磁場や，ゆっくりと円滑な変化のずれであるフラット・トップの効果を知る必要があり，また，ハミルトニアン形式や作用変数を求めることも，もちろん，今後の重要な課題である．

そして，最後になったが，FFAG 加速器に代表される，シンクロ・サイクロトロンの加速理論も，二段階構成で，第二段階が二段階の過程を経ると考えられ，その構築も，また，筆者の関心事の一つである．

謝辞

この解説は，2003 年 12 月 18 日と 19 日の両日開催された，RCNP ワークショップ「サイクロトロンの動力学的非線形加速理論の議論–シンクロ・サイクロトロンの軌道理論との統一–」での筆者自身の報告を基にして，最近の結果を取り入れ，執筆した．このワークショップにより格段の進展があり，いまだ道半ばとは言え，多くの皆さんの助けを借りて，何とか，非線形加速理論の枠組みを示すところまで漕ぎ着けることが出来た．その開催を強く勧めて頂いた，核物理研究センター長の土岐博さんには本当に心から感謝します．また，このワークショップに参加され，その経

験と深い造詣に基づいて，筆者の見落としていた点を的確に指摘して頂いた，兵庫県立大ニュースバルの安東愛之輔さんに感謝します．この解説の背景には，粒子の運動のシミュレーション計算や磁場分布の数値計算があり，筆者の我が侭を聞き入れ，その無理に応じて頂いている，原研高崎の宮脇信正さんと福田光宏さん，それに，電機大理工学部の小畑修二さんに感謝します．特に，原研高崎では，AVF サイクロトロンで加速電圧のフラットトップ化を実施し，素晴らしい高品質ビームの生成に既に成功されており，また，シミュレーション計算でも，素晴らしい結果を出されています．ただ，多岐にわたる計算結果では様々な現象が起こるように見え，見通しの良い形で全容が把握出来ていないため，計算結果の紹介は割愛させて頂きました．しかし，今回の非線形加速理論を構築するに当たり，それをつまみ食いしている点が多々あります．また，東大核研や放医研の昔の仲間，阪大核物セの今の仲間，さらには，その他のサイクロトロン加速器施設の皆さんには，今でも未完の加速理論であるのに，一年半以上も前に，まだまだ，つたない話を聞いて頂く等，煩わせており，一人ひとりのお名前を挙げませんが，ここに感謝します．