

PHASE-SPACE MANIPULATION AND CONDITIONING FOR FEL

Kenichi Kaneta^{1,A)}, Hiromi Okamoto^{A)}, Andrew M. Sessler^{B)}

^{A)} Hiroshima University, 1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8530, Japan

^{B)} Laurens Berkeley National Laboratory, 1 Cyclotron Road, Berkeley, CA94720, U.S.A.

Abstract

We study a method of controlling charged-particle distributions in six-dimensional phase space. A compact storage ring operating near difference resonances is employed to transfer or exchange emittance projections on to three spatial degrees of freedom. Since we only rely on conservative forces, the present scheme does not affect the emittance itself; namely, the six-dimensional volume occupied by the beam is unchanged. In a process of emittance transfer, a strong correlation is naturally developed in phase space, which may be useful for specific purposes. As a possible application of such an emittance manipulation, we consider free electron lasers and show some simulations results that demonstrate the effectiveness of the present scheme.

エミッタンス制御による自由電子レーザーの高効率化

1. はじめに

“エミッタンス”は6次元位相空間上でビームが占有する体積として定義され、散逸力の働かない力学系では近似的に保存する。エミッタンスはビームの質を端的に表す指標であり、その値の小さいビームほど質が高いと言える。しかし、ビームが加速器中で受ける外力は通常保存的であるため、エミッタンスを人為的に縮減するのは難しいことが知られている。一方、エミッタンスを特定の空間自由度に射影した“射影エミッタンス”はハミルトン系においても変化することが許される。本論文ではこの点に着目し、簡易な保存力を用いて射影エミッタンスを制御する方法とその利点について議論する^[1,2]。

バンチを構成する個々の荷電粒子は（クーロン相互作用等が無視できる場合）3自由度各々においてほぼ独立に振動している。この場合、6次元エミッタンスだけでなく、射影エミッタンスも保存する。ここでは、射影エミッタンスを人為的に加減するため、特定次数の非散逸的な結合ポテンシャルを導入する；結合ポテンシャルを通じて、自由度間に制御可能な相関を与えるわけである。後述するように、射影エミッタンスの交換を促進するには当該自由度が共鳴的に結合していなければならない。したがって、以下で考察するスキームには蓄積リングが必要である^[1]。既存の蓄積リングを利用してよいし、位相空間制御専用の小型蓄積リングを考えてもよい。

3つの射影エミッタンスの重要度があらゆる用途において常に等しいわけではないことは周知の事実である。よって、ビーム冷却による本質的な低エミッタンス化を図らずとも、単純な保存力に基づいた射影エミッタンスの交換・制御により、容易に状況を改善できる可能性がある。また、射影エミッタンスの交換過程で生じる特殊な位相空間粒子分布

（自由度間に強い相関を有する粒子分布）が特定の目的にきわめて有用である可能性も指摘されている^[2]。位相空間制御が有効なひとつの例として、以下では“自由電子レーザー（FEL）”を採り上げる。よく知られているように、FEL発振の条件は電子ビームのエネルギー拡がりや横方向自由度の射影エミッタンスに依存している。したがって、ビームの初期状態によっては、位相空間制御後の発振効率を有意に向上させることができると考えられる。

2. モデル

蓄積リング中を周回する荷電粒子の運動は擬似的に調和振動子の重ねあわせで表現できる。位相空間制御のために導入する結合ポテンシャルを $\phi_c(x, y, z; s)$ とすると、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} \sum_{q=x,y,z} \left[p_q^2 + \left(\frac{v_q}{R} \right)^2 q^2 \right] + \phi_c(x, y, z; s), \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 x, y, z はそれぞれ水平、垂直、ビーム進行方向を表し、 v_q ($q=x, y, z$)は各方向のチューン、 R はリングの平均半径である。以下では、対称的な結合ポテンシャル

$$\phi_c / R = (g_x x^m z^n + g_y y^m z^n) \delta_p(s) \quad (2)$$

(m, n は整数、 $g_{x(y)}$ は結合定数)を仮定する。尚、結合源としては特殊な共振空洞や多重極磁石などが考えられ、設計軌道上の特定の座標に局所化されているので、周期 $2\pi R$ の周期デルタ関数 $\delta_p(s)$ を乗じてある。このポテンシャルにより、そもそも独立だった3自由度の運動に相関が誘起されるが、それだけでは効率的なエミッタンス交換を実現することはできない。エミッタンスの交換を促進するには以

¹ E-mail: ken-ichi47@hiroshima-u.ac.jp

下の条件（差共鳴条件）が必要である^[1]：

$$m\mathbf{v}_{x(y)} - n\mathbf{v}_z \approx \ell_{x(y)} \quad (3)$$

ここで $\ell_{x(y)}$ は整数である。

線形のシステムを使ったエミッタンス交換スキームがCornacchiaとEmmaにより提案されている^[3]。彼らのスキームは蓄積リングを必要としないため非常に簡便で優れているが、一方で、進行方向と横方向の射影エミッタンスを完全に交換することしかできないという難点がある。本論文で考察する手法は蓄積リングを必要とするが、射影エミッタンスの交換量に大きな自由度がある；結合ポテンシャルをオンオフすることによって、任意の射影エミッタンス比が実現できる。ただし、各方向の射影エミッタンス $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ の間には以下の関係が成立している：

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m} + \frac{\varepsilon_z}{n} = \text{const.} \quad (4)$$

また、先に言及したように、部分的なエミッタンス交換の過程で特殊な位相空間分布が自然に生成されるのも共鳴結合スキームの特徴である。

3. FEL分散関係式

位相空間制御の具体的な応用例として、FELについて考える。Chinらの導いたFEL成長率 μ の評価式は^[4]

$$\ln \frac{\mu(r_1, r_2, r_3)}{D} = -U \left[1 + \frac{r_2^2 r_3^2}{0.17 + 0.0304 \ln r_3} + YW \right]^{1/2} \quad (5)$$

で与えられる。Dはスケールパラメーターで、

$$D = \sqrt{\frac{2eZ_0 K^2 I_0}{\pi mc^2 (1 + K^2) \gamma}} \quad (6)$$

とする。eは電荷素量、 $m\gamma c^2$ は電子のエネルギー、 Z_0 は真空のインピーダンス、 I_0 はピーク電流値、Kはアンジュレーター磁場の強さを表す。また、

$$r_1 = \frac{\sigma_\gamma}{D}, \quad r_2 = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}, \quad r_3 = \frac{K}{\sqrt{2}\gamma D} \quad (7)$$

である。ここで、 λ は発振波長、 ε は横方向の二乗平均エミッタンスである。簡単のため $\varepsilon_x = \varepsilon_y (\equiv \varepsilon)$ が仮定されている。式(5)中のU, Y, Wは (r_1, r_2, r_3) の関数である。電子ビームのエネルギー拡がり σ_γ は進行方向エミッタンスを使って

$$\varepsilon_z = \sigma_\gamma \sigma_\gamma = D\sigma_\gamma r_1 \quad (8)$$

と表されるので、式(4)の保存量は以下のように書き直すことができる；

$$nr_1 r_4 + mr_2 = \alpha_{mn} \quad (9)$$

ここで、新たなパラメーター $r_4 = 2\pi D\sigma_\gamma / \lambda$ を導入した。 α_{mn} はリング入射前のビーム状態から決まる定数である。以上の公式より、 $(r_1, r_2, r_3, r_4, \alpha_{mn})$ のうち4つを決定することで、射影エミッタンス移送前後でのFEL成長率の変化を大雑把に見積もることができる。

いま特に線形結合ポテンシャル ($m=n=1$) について考えてみる。図1はFEL成長率をパラメーター r_2 の関数としてプロットしたものである。ここで想定されている条件下 ($\alpha_{11}=2, r_3=0.12, r_4=15$) では、 r_2 (換言すれば、横方向エミッタンス) を位相空間制御により縮小化することができればFELの発振効率が改善されることがわかる。ここで、初期的な進行方向エミッタンスは横方向に比べて十分小さいとした；通常の電子ビームは逆であるが、レーザーライス法などにより、進行方向エミッタンスを非常に小さく抑える可能性が検討されている^[5]。さて、 r_1 が十分小さい場合には、その変化がFEL成長率に大きく寄与しないことに着目し、簡単のため $(r_1, r_2) = (0, \alpha_{11})$ と仮定する。共鳴結合リングで射影エミッタンスの完全交換を行うと、これらのパラメーターは $(r_1, r_2) = (\alpha_{11}/2r_4, \alpha_{11}/2)$ に変化する。この事実の基づいて、エミッタンス交換の有効度を以下の式より評価することにする：

$$h = \frac{\mu(\alpha_{11}/2r_4, \alpha_{11}/2, r_3)}{\mu(0, \alpha_{11}, r_3)} \quad (10)$$

この値が1より大きければ、エミッタンスの完全交換によってFEL成長率が向上すると期待される。 (r_3, r_4, α_{11}) をそれぞれ独立に変化させ、hを計算した結果が図2である。h=1.0, 1.3, 1.6, 1.9に対応する等高面がプロットされている。

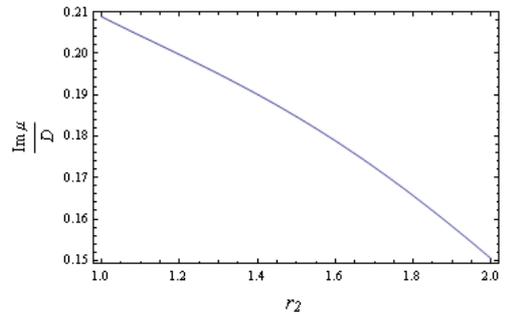


図1：線形共鳴結合 ($m=n=1$) 下でのFEL成長率の横方向エミッタンス依存性。一例として、 $\alpha_{11}=2, r_3=0.12, r_4=15$ が仮定されている。

4. FELシミュレーション

前節の理論に基づいて射影エミッタンス移送が有効な初期条件を特定し、3次元コードGENESIS^[6]を用いて理論的予想の妥当性を検証した。電子ビームのエネルギーは1GeVとし、ナノメートルオーダーの発振波長を想定してシミュレーションを実施した。初期的な横方向エミッタンスを $1.87\mu\text{m}$ 、縦方向エミッタンスを $0.187\mu\text{m}$ とした場合の計算結果を図3に示す。発振波長は $\lambda=6\text{nm}$ 、アンジュレーターの交番間隔は2cm、K値は1.14、ピーク電流は86.86Aとしてある。このとき、 $\alpha_{11}=2, r_3=0.12, r_4=15$ となり図1で想定されたパラメーターと一致する。共鳴結合リングを通すと、射影エミッタンスは $\varepsilon=$

1.03 μm , $\varepsilon_z = 1.87\mu\text{m}$ に変化する. 成長率の変化として $h \approx 1.5$ が期待されるが, これは図3の結果とほぼ合っている.

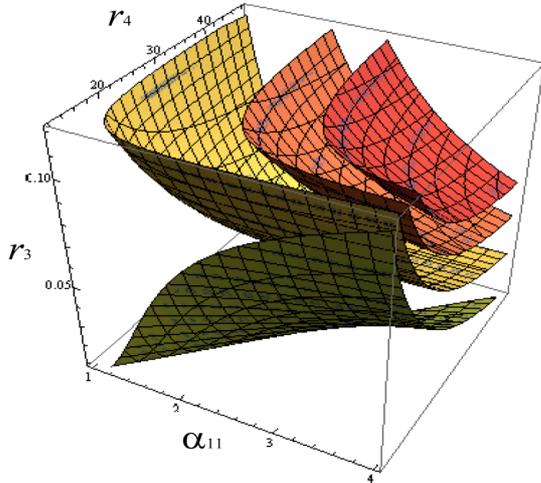


図2: エミッタンス交換の有効性を表す等高面図. 緑色の面から $h = 1.0, 1.3, 1.6, 1.9$ の場合に対応する.

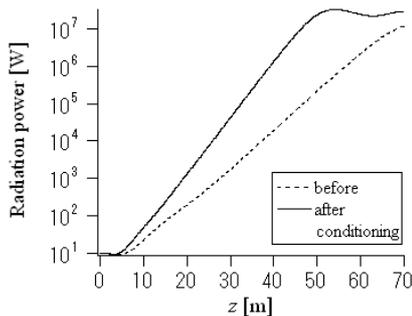


図3: GENESISによるFEL出力のシミュレーション結果. 破線はエミッタンス交換前, 実線は交換後の電子ビームに基づいている.

5. 位相空間上の相関関係

射影エミッタンスの移送過程で自然に生じる特殊な位相空間粒子分布がFELに有用である可能性を示す. 個々の電子がもつエネルギー偏差 $\Delta\gamma$ と横方向作用変数 (J_x, J_y) の間に以下の関係が成立しているとき, FELの発振効率が著しく向上することが知られている^[7]:

$$\Delta\gamma/\gamma = \kappa_x J_x + \kappa_y J_y. \quad (11)$$

ベータatron関数の平均値を $\bar{\beta}_{x(y)}$ とすると, $\kappa_{x(y)} = \lambda_w / 2\lambda \bar{\beta}_{x(y)}$ のように定義できる. 敢えてラティスと整合していないビームを共鳴結合リングに入射し, 3次の非線形ポテンシャル ($m=2, n=1$) を用いて射影エミッタンスの交換を行うと, $\gamma - J_{x(y)}$ 空間上に図4のような特殊な相関を形成できる. 左図は弱い不整合を導入した場合, 右図は不整合の度合いをさらに強めた場合の典型例である. ラティスに整合したビームでは, エミッタンス交換後の粒子分布に図

のような相関は発生しない (γ の平均値に対して, 上下ほぼ対称な分布になる). いずれの例でも, 正のエネルギー偏差が大きい粒子ほど作用変数も平均的に大きな値をとっていることが分かる. つまり, ($\kappa_{x(y)}$ の値は別として) 式(11)で表される相関が実際に生じている. このような粒子分布をもつ電子ビームが実際にFEL発振を高効率化することはGENESISを使ったシミュレーションにより既に確認済みである^[2].

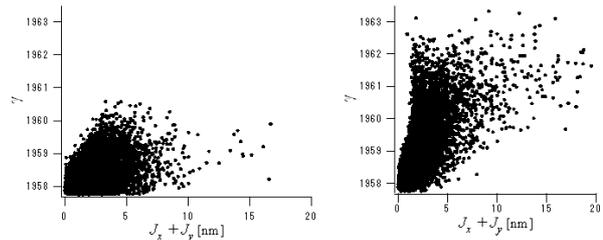


図4: 3次の非線形結合共鳴によって形成される特殊位相空間上の相関. リングのラティスに対する初期ビームの不整合が弱い場合 (左図) と強い場合 (右図) の典型例が示されている.

6. 結論

共鳴結合に基づいて, 荷電粒子ビームの位相空間形状を人為的に制御する手法について考察した. この手法は非保存力に依拠していないため簡便で, 既存のリングにも容易に適用できる. 実現可能な射影エミッタンスの配分比はシンプレクティック条件による一定の制限を受けるが, 初期ビームの状態によっては非常に有効なスキームであるといつてよい. また, エミッタンスの移送過程で各自由度間に有意な相関が発生する. 単に射影エミッタンスの絶対値をコントロールだけでなく, 位相空間上での粒子分布そのものを操ることにより, 目的に応じたビームの最適化が実行できる可能性が示唆された.

本手法の適用例としてFELを考え, 進行方向エミッタンスが非常に小さい特殊なケースにおいて共鳴結合スキームの有効性が示された. また, いわゆる“ビームコンディショニング^[7]”の可能性についても検討し, エミッタンス移送過程で所定の相関が近似的に実現できることを確認した.

- [1] H. Okamoto *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 074501.
- [2] H. Okamoto *et al.*, “Theoretical study of emittance transfer”, Proc. COOL07 (Bad Kreuznach, Germany, 2007) pp.82 – 86.
- [3] M. Cornacchia and P. Emma, Phys. Rev. STAB **5** (2002) 084001.
- [4] Y. H. Chin *et al.*, Nucl. Instrum. Meth. A **318** (1992) 481
- [5] K.-J. Kim and A. M. Sessler, Proc. COOL05 (Galena, USA, 2005) p.115.
- [6] GENESIS is a free software originally developed at DESY. Detailed information is available at the web site: <http://pbpl.physics.ucla.edu/Computing>
- [7] A. M. Sessler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 309.