

超伝導加速空洞の表面磁場効果 THE SURFACE MAGNETIC FIELD EFFECTS ON SUPERCONDUCTING ACCELERATING CAVITIES

江木昌史*

Masato Egi*

High Energy Accelerator Research Organization

Abstract

One of various causes for Joule loss in a superconducting accelerating cavity is thought to be created by the normal-conducting electrons, but it is unreasonable for normal-conducting electrons to move in a superconductor by sensing an external electric field. This article aims to show that what drives the normal-conducting electrons may be the surface magnetic field, and to confirm how it is expressed.

1. はじめに

超伝導加速空洞(以下、超伝導空洞)では様々な原因によりジュール損失が発生することが知られている。その中でBCS理論の準粒子による損失があり、これまで理論的なアプローチにより解明されて来た。準粒子は常伝導電子と単純に捉える時に、古典論で記述できると考えることは着想として自然なことである。本稿は超伝導空洞のジュール損失の中でも常伝導電子と解釈された準粒子の寄与を古典論により再構築することを目標としている。そのためにはまず、ピルボックスにより電磁場と表皮電流を単純化することから話を始める。本稿の計算は全てSI単位系を用いる。

2. ピルボックスの電磁場

2.1 1.3GHz ピルボックスの概要

1.3GHz ニオブ製ピルボックスを仮定する (Fig.1)。ニオブは臨界温度 $T_c = 9.25 K$ 以下で超伝導状態であり、それより高い温度では常伝導状態である。円筒の半径を r_0 m、軸方向の長さが l_0 m、両端面には $\pm q_0$ C の電荷が蓄積されると考える。 $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ とすると自由空間の $f_0 = 1.3$ GHz の電磁波の波長は $\lambda_0 = c/f_0 = 0.230$ m である。電子が光速に近い速度で加速空洞中を加速電場の半周期で通過するためには $l_0 = \lambda_0/2 = 0.115$ m の条件が必要となる。また計算を簡単にするために $r_0 = 0.115$ m も仮定する。ピルボックスの加速モード TM010 の共振周波数は $f_0 = 2.405c/2\pi r_0$ Hz であり [1]、ここに $r_0 = 0.115$ m を代入すると $f_0 = 0.9978$ GHz となり、この仮定により共振周波数が3割ほどの誤差を持つことに注意する。更に計算を簡単にするために Fig.1 のとおり、端面上の電荷分布をベッセル関数の線形近似 $J_0(2.405r/r_0) \approx 1 - (r/r_0)$ を用いる [2]。この章では特に常伝導と超伝導の区別は設けない。また、便宜的にピルボックスの両端面を極板と呼ぶことにする。

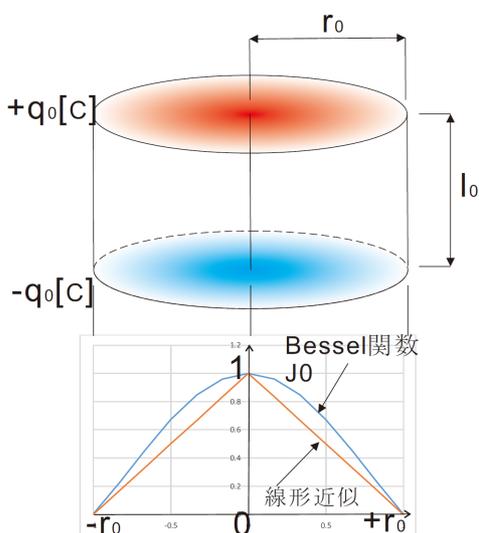


Figure 1: Pillbox cavity.

2.2 容量 C と誘導 L

加速モード TM010 の電磁場は模式的に Fig.2 のように表せる。電場 E は鉛直上向きを正に取り、磁場 H は反時計回りを正に取る。本稿では電場と電界強度、磁場と磁界強度を同義で用い、電束密度と磁束密度は略さずに用いる。

ピルボックス内の電場エネルギーは特定位置 \mathbf{r}_1 の電界強度 $E(\mathbf{r}_1)$ に着目して単純化できる。ピルボックス内の任意の位置 \mathbf{r} の電界強度 $E(\mathbf{r})$ はほぼ同位相で変動しており、従って電場エネルギーの全体量も同位相で変動する。すると体積素片を dV として電場のエネルギー密度をピルボックス内で積分すると、

$$\int_{pillbox} \frac{1}{2} \epsilon_0 E(\mathbf{r})^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 E(\mathbf{r}_1)^2 V_E [J] \quad (1)$$

となり、電場エネルギーの全体量は特定位置のエネルギー密度 $\epsilon_0 E(\mathbf{r}_1)^2/2$ の定数倍となる。その比例定

* masato.egi@kek.jp

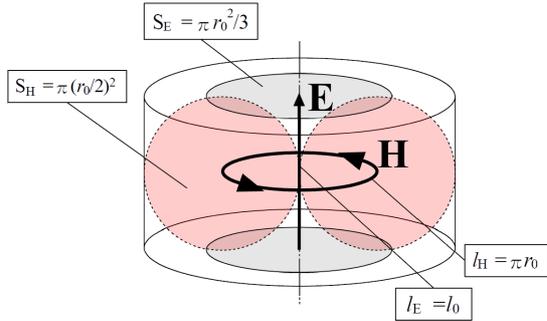


Figure 2: Electromagnetic Field in Pillbox.

数 \mathcal{V}_E は換算体積と呼ぶことができる。以降は \mathbf{r}_1 を極板中心に取り、その表面電場を $E_0 = E(\mathbf{r}_1)$ と置くことにする。極板の電荷分布は Fig.1 の円錐状を仮定しているので、極板電荷 q_0 と E_0 の関係は、

$$q_0 = \epsilon_0 E_0 \pi r_0^2 / 3 \quad [C] \quad (2)$$

である [2]。 (2) 式は電磁場の具体的な数値を与える上で重要である。この式は半径 $r_0/\sqrt{3}$ の円内で電束密度 $\epsilon_0 E_0$ が一定であると捉えることもできる (Fig.2)。 (1) 式の積分を U_E と置いて、電場、電圧、電荷の関係を整理すると、

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \{S_E l_E\} E_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \mathcal{V}_E \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S_E}{l_E} \{E_0 l_E\}^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{l_E}{\epsilon_0 S_E} \{\epsilon_0 S_E E_0\}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q_0^2 \quad (5)$$

となる。ただし、 $l_E = l_0$ 、 $S_E = \pi r_0^2/3$ と置いている。これによりピルボックスの容量 C は、

$$C = \epsilon_0 S_E / l_E \quad (6)$$

と定義できる。

磁界強度についても同様に、

$$\int_{pillbox} \frac{1}{2} \mu_0 H(\mathbf{r})^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \mu_0 H(\mathbf{r}_2)^2 \mathcal{V}_H \quad [J] \quad (7)$$

であり、 \mathcal{V}_H は磁場の換算体積である。ピルボックス内の磁場分布はトロイダルコイルの磁場分布 (トラス) と同じである。平均磁路長を $l_H = 2\pi(r_0/2)$ と置くと、磁束の断面積は $S_H = \pi(r_0/2)^2$ である。極板電荷が q_0 の時の電流値は $I_0 = \omega q_0 = \dot{q}_0$ であり [2]、平均磁路長上の磁界強度 $H_0 = I_0/l_H$ がトラス内に分布していると考えられることができる。 (7) 式の積分を U_H と置くと、磁場、電流、磁束の関係は、

$$U_H = \frac{1}{2} \mu_0 \{S_H l_H\} H_0^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 \mathcal{V}_H \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S_H}{l_H} \{H_0 l_H\}^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{l_H}{\mu_0 S_H} \{\mu_0 S_H H_0\}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{L} \Phi_0^2 \quad (10)$$

となる。これによりピルボックスの誘導 L は、

$$L = \mu_0 S_H / l_H \quad (11)$$

と表すことができる。

ここで、定義された容量 C と誘導 L により共振周波数とインピーダンスを求めてみる。これまでに与えられている数値を代入すると、

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 0.8114 \times 10^9 \quad [Hz]$$

また、

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times 0.4886 \quad [\Omega]$$

である。共振周波数については仮定している $1.3 \times 10^9 \text{ Hz}$ より 4 割ほど低い値であるが、元々 3 割低い共振周波数に半径 r_0 を設定していた。インピーダンスについてはより詳細な計算と良く一致している [2]。これは回路理論の容量 C や誘導 L として一定の合理性があることを示している。

3. 超伝導状態の電子比熱

実験によると超伝導状態の電子比熱 C_{es} は、

$$C_{es} = \alpha \gamma T_c \exp(-BT_c/T) \quad [J/(g \cdot K)] \quad (12)$$

である [3]。 α は比例定数、 γT_c は臨界温度 T_c における通常の電子比熱、 $B \simeq 1.5$ である。この式は温度 T 、 $1g$ の超伝導体において $1K$ の温度を下げる時に常伝導-超伝導遷移に要するエネルギーを表す。超伝導エネルギーギャップ $\Delta_0 = 2k_B T_c$ は電子比熱 γT_c の定数倍なので、電子比熱 γT_c が一電子当たりの超伝導遷移エネルギーを意味すると捉えることもできる。では温度 T において遷移可能な常伝導電子の状態密度は $\exp(-BT_c/T)$ であろうか。次に検証してみる。

超伝導現象を扱う場合、温度は臨界温度 T_c で除した特性温度 $t = T/T_c$ を常用する。超伝導電子数密度を $n_s(t)$ とすると $t = 0$ の時に $n_s(0) = n_e$ をここでは仮定する。ただし、 n_e は単位体積当たりのニオブの $5s$ 電子数密度、 $n_e = 5.55 \times 10^{28} \text{ electrons/m}^3$ である [2]。ロンドン侵入深さの考察から $n_s(t) = n_e(1 - t^4)$ の関係があり [4]、従って常伝導電子数密度は $n_n = n_e t^4$ である。 (12) 式は常伝導から超伝導に遷移する電子の状態密度を因子として含んでいなければならない。 $n_n = n_e t^4$ は常伝導電子数密度の温度依存性を示しており、従って t による導関数は常伝導から超伝導に遷移する電子数 (t における状態密度) を与えることができる。そこで超伝導遷移が急激に生じる $t = [0.5, 1]$ の領域で $\partial n_n / \partial t = 4n_e t^3$ の t^3 を $\exp(-\Delta_0/k_B T_c) = \exp(-2/t)$ で除して見て、その比率を観察してみる (Fig.3)。縦軸の " $t^3 / \exp(-2/t)$ " は $t = [0.5, 1]$ の領域でおよそ 7 程度の一定した比率を示している。これは $t = [0.5, 1]$ において $\exp(-2/t)$ に 7 を乗じると t^3 とほぼ同じ形のグラフを描くことを意味している。 $t = [0, 0.5]$ の領域では微分係数が

小であるためにそもそも変化量が小さく、また絶対値が小の数の逆数も大きく変動するので確認作業から除外した。従って、 n_n の導関数と同様に $\exp(-2/t)$ は超伝導遷移する常伝導電子の状態密度を与えると考えることができる。

以上より、 $n_n = n_e t^4$ が超伝導体中の常伝導電子数密度であることに合理性があると判断できる。

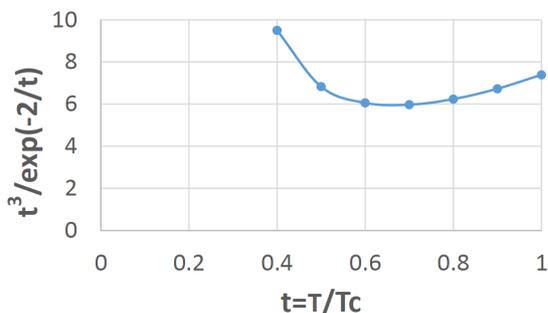


Figure 3: Ratio between t^3 and $\exp(-2/t)$.

4. 誘導電場と常伝導電流

4.1 超伝導電流のモデル化

超伝導空洞の電磁場と高周波損失の計算を行いたいが、そのためには超伝導状態の表皮電流をモデル化しなければならない。そのモデル化の際、以下の理由により、当座の考察対象はピルボックス側面とする。極板上の電荷にはクーロン力が働き、ピルボックス側面の超伝導電子は極板電荷に押し出されて、或いは、一体となって運動するだけであり、ピルボックス側面は考察対象を電流のみに限定でき、モデルをより単純にすることができる。

まず超伝導ニオブの表面状態を以下のように単純化する (Fig.4)。最表面は厚さ約 5nm の酸化ニオブ層があり、その下に超伝導ニオブがある。表面から深さ方向に x 軸の正を取り、酸化膜とニオブの界面に x 軸の原点を取る。原点から深さ 40nm までの領域がコヒーレンス長 ξ_0 で、この領域に超伝導電流が一樣に流れると仮定する。 $\{0 \leq x \leq \xi_0 \mid J(x) = const.\}$ である。第 2 章で述べたとおり、ピルボックス内の磁場分布はトロイダルコイルと同じなので内部磁場は表皮電流の外に漏れない。すなわち $x > \xi_0$ では磁界強度 $H = 0$ であり、電流密度も $J = 0$ である。すると、表皮電流は磁場遮蔽電流 (マイスナー電流) と等価であり、マイスナー電流は考察対象から除外できる。また、電流密度が一樣の条件より $0 \geq x \geq \xi_0$ における磁界強度は、

$$H(x) = H_{S0} (1 - x/\xi_0) \quad [A/m] \quad (13)$$

である。 $x = 0$ で最大磁界強度 $H(0) = H_{S0}$ であり、直線的に減少し $x = \xi_0$ で $H(\xi_0) = 0$ となる。前章の平均磁路長における磁界強度は $H_0 = I_0/\pi r_0$ であるのに対し、ピルボックス側面の表面磁場は $H_{S0} = I_0/2\pi r_0$ である [2]。

ベクトルポテンシャル A は表皮電流の外側 ($x > \xi_0$) においても存在するが以下の理由で考察から除外する。一電子の運動量は $p = m_e v + e_0 A$ である。電流密度は $J = n_e e_0 v$ であるので、右辺第一項が電流密度に寄与する。第二項は表皮電流が作るベクトルポテンシャル A の中に e_0 を置くことにより付与される運動量である。超伝導体は磁場は遮蔽するがベクトルポテンシャルは遮蔽できないと考えられており、もしも $x > \xi_0$ において $\text{rot } A = \mu_0 H \neq 0$ ならばトロイダルコイルの磁場の条件として不合理である。従って $x > \xi_0$ におけるベクトルポテンシャルは考察から除外する。

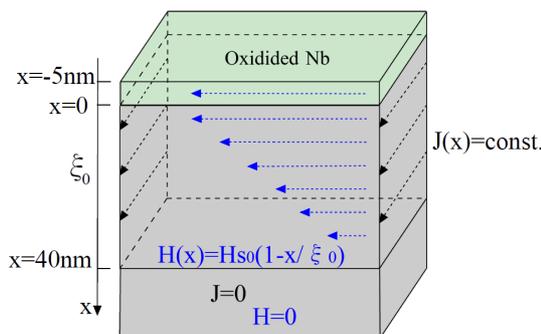


Figure 4: Surface Current and Magnetic Field.

4.2 超伝導空洞の高周波損失と表面抵抗

理論上、超伝導電子は一つの波動関数であり、全体が一体となって運動する。常伝導電子の場合、フェルミ球内の状態和は常伝導電子数に等しく、外部電場によるフェルミ球の変位は状態和と同数の過程を経る必要がある。超伝導、常伝導の二相状態では過程が複雑な常伝導電子は外部電場により動くことができないと普通は考えられる。仮に超伝導体内で常伝導電子を動かす電場が存在するならば、候補に誘導電場が挙げられる。超伝導体は直流電流で有限な抵抗値を示さないので、誘導電場を考えるのは決して無理な話ではない。ここで誘導電場とは磁場の時間変化によるものであり、表皮電流が自分で作る磁場から受けるローレンツ力とは異なるものとする。また、誘導電場は超伝導電子にも作用するが、誘導電場も働いた状態で超伝導空洞は共振状態に入ると考えられる。単純化のために $\omega = 1/\sqrt{LC}$ の共振状態を仮定する。

マクスウェル方程式から誘導電場 $E_I(x)$ (ただし、 $0 \leq x \leq \xi_0$) を直接導くのは意外と難しく、誘導電場 $E_I(x)$ をローレンツ力として求めることにする。誘導電場の向きは超伝導電流 I_0 の変化を妨げる向きに働く。電流 I_0 の向きが定めれば (13) 式の磁場 $H(x)$ の向きも定まる。磁場 $H(x)$ の並進移動によるローレンツ力が超伝導電流の変化を妨げると考え、並進移動速度を \dot{x} とする。実際のところ磁場は電流に出入りし、動いているとも考えられる。するとローレ

ンツ力 $E_I(x)$ は、(13) 式を用いて、

$$\begin{aligned} E_I(x) &= -\dot{x} \times \mu_0 H(x) \\ &= -\frac{\partial H(x)}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial H(x)} \times \mu_0 H(x) \\ &= -\dot{H}(x) \cdot \frac{\xi_0}{H_{S0}} \cdot \mu_0 H_{S0} (1 - x/\xi_0) \\ &= -\mu_0 \xi_0 (1 - x/\xi_0)^2 \dot{H}_{S0} \quad [\text{V/m}] \quad (14) \end{aligned}$$

となる。ここでコヒーレンス長 ξ_0 の領域で磁界強度の勾配は一定なので $\partial H(x)/\partial x = H_{S0}/\xi_0$ と置いている。更に誘導電場 $E_I(x)$ を $x = [0, \xi_0]$ の深さ方向で積分すると、

$$\int_0^{\xi_0} E_I(x) dx = E_I(0) \frac{\xi_0}{3} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \text{m} \right] \quad (15)$$

である。この式の $\xi_0/3$ は誘導電場 $E_I(0)$ 方向の距離ではなく、 $E_I(0) \xi_0/3$ の単位は電圧とは異なる。(15) 式は $x = 0$ における誘導電場 $E_I(0) = -\mu_0 \xi_0 \dot{H}_{S0}$ が深さ $x = [0, \xi_0/3]$ の領域で一定して作用していると捉えることもできる。

室温の電気伝導度は緩和時間を τ とすると $\sigma = n_e e_0^2 \tau / m_e$ である。超伝導体中の常伝導電子数密度は $n_e t^4$ と考えているので、超伝導体中の常伝導電子の電気伝導度を σt^4 と仮定してみることにする。すると誘導電場 $E_I(0)$ により生じる常伝導電流密度は $J_I = \sigma t^4 E_I(0)$ であり、ピルボックス側面を流れる電流値 I_I は、 $H_{S0} = \omega I_0 / 2\pi r_0$ に注意して、

$$I_I = \sigma t^4 E_I(0) 2\pi r_0 \frac{\xi_0}{3} = -\sigma t^4 \mu_0 \frac{\xi_0^2}{3} \omega I_0 \quad [\text{A}] \quad (16)$$

である。するとピルボックス側面におけるジュール損失は、常伝導電流の占める体積を \mathcal{V}_R として、

$$\begin{aligned} W_{I1} &= \int_{\text{side surface}} \frac{1}{2} \sigma t^4 E_I(0)^2 d\mathcal{V}_R \\ &= \frac{1}{2} \sigma t^4 (-\mu_0 \xi_0 \dot{H}_{S0})^2 2\pi r_0 \frac{\xi_0}{3} l_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{6\pi} \sigma t^4 \mu_0^2 \xi_0^3 \omega^2 I_0^2 \quad [\text{W}] \quad (17) \end{aligned}$$

である [2]。ただし、 $l_0 = r_0$ と置いていた。極板では中心軸から半径 r における表面磁場は、

$$H(0, r) = \frac{3I_0}{\pi r_0^2} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3r_0} \right) \quad [\text{A/m}]$$

であるので [2]、前述の $E_I(0)$ に対応する極板上の半径 r の位置の表面誘導電場を $E_I(0, r)$ と表すと、

$$\begin{aligned} E_I(0, r) &= -\mu_0 \xi_0 \dot{H}(0, r) \\ &= -\mu_0 \xi_0 \frac{3\dot{I}_0}{\pi r_0^2} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3r_0} \right) \quad [\text{V/m}] \quad (18) \end{aligned}$$

である。すると、両極板の損失の合計 W_{I2} は、

$$\begin{aligned} W_{I2} &= 2 \int_0^{r_0} \frac{1}{2} \sigma t^4 E_I(0, r)^2 2\pi r \frac{\xi_0}{3} dr \\ &= 2 \frac{1}{2} \sigma t^4 \mu_0^2 \frac{\xi_0^3}{3} \frac{9\omega^2 I_0^2}{\pi^2 r_0^2} \int_0^{r_0} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3r_0} \right)^2 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{12 \cdot 31}{16 \cdot 15 \cdot 9 \cdot \pi} \sigma t^4 \mu_0^2 \xi_0^3 \omega^2 I_0^2 \\ &\simeq \frac{1}{2} \frac{1}{6\pi} \sigma t^4 \mu_0^2 \xi_0^3 \omega^2 I_0^2 \quad [\text{W}] \quad (19) \end{aligned}$$

である。従って、ピルボックス内の損失 W_I は、

$$\begin{aligned} W_I &= W_{I1} + W_{I2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3\pi} \sigma t^4 \mu_0^2 \xi_0^3 \omega^2 I_0^2 \quad [\text{W}] \quad (20) \end{aligned}$$

となる。超伝導表皮電流 I_0 に対する表面抵抗 R_I は、

$$R_I = \frac{1}{3\pi} \sigma t^4 \mu_0^2 \xi_0^3 \omega^2 \quad [\Omega] \quad (21)$$

$$= \sigma t^4 \times 7.08 \times 10^{-16} \quad [\Omega] \quad (22)$$

となる。第2章の誘導 L により $\omega L = 293.5 \Omega$ が得られることから、 R_I による無負荷 Q を Q_{0I} と表すと、

$$Q_{0I} = \frac{\omega \frac{1}{2} L I_0^2}{\frac{1}{2} R_I I_0^2} = \frac{293.5}{R_I} \quad (23)$$

$$= \frac{4.14 \times 10^{17}}{\sigma t^4} \quad (24)$$

となる [5]。室温時の電気伝導率を $\sigma(300\text{K})$ と表すと、(22) 式と (24) 式には $\sigma = \sigma(300\text{K}) \times RRR \text{ S/m}$ を代入することが必要である [6]。

5. まとめ

超伝導空洞表面の誘導電場により常伝導電流が生じると考えた。超伝導体の電子比熱より超伝導体中の常伝導電子数密度は $n_n = n_e t^4$ により近似できることに合理性がある。超伝導体の中でも常伝導電子が古典論に従うと仮定すると表面抵抗 (21) 式が導かれる。これは BCS 理論など理論的なアプローチにより得られる結果と同等と考えられる。

参考文献

- [1] 高田耕治 OHO 1997, “高周波加速”。
- [2] M. Egi, Proceedings of the 18th Annual Meeting of PASJ, 2021, Takasaki, Japan, THP034.
- [3] N.E. Phillips, Phys. Rev. 134, 385 (1965).
- [4] M. Tinkham, “超伝導入門 第2版”。
- [5] E. L. Ginzton, “Microwave Measurements”。
- [6] K. Saito, 「加速器」 Vol. 2, No. 4, 2005 (479-493).