

洞の RF 振幅と位相の微小な変動を仮定する。

$$\tilde{V}_c = [V_{c0} + \hat{v}(t)] e^{i[\Psi_c + \hat{\phi}(t)]} \quad (2)$$

空洞の位相は任意なので、以下は $\Psi_c = 0$ とすると、RF 振幅と位相の変動により生じる加速ビームのエネルギー誤差は

$$\epsilon_1(t) = [V_{c0} + \hat{v}(t)] \cos [\hat{\phi}(t) + \Psi_1] - V_{c0} \cos \Psi_1 \quad (3)$$

となる。

減速ビームは、主空洞電場の変動とこれを受けた周回軌道での擾乱のため、空洞に再入射する時の電流と位相が変化する。ここでは、ビーム損失とビーム位相がエネルギーの 1 次に比例するという線形モデルを採用する。また、エネルギー誤差を持った電子が、周回軌道のうち運動量分散の大きな位置で損失する事象がビーム損失を支配すると考える。

$$\tilde{I}_2 = [I_0 + \hat{i}_2(t)] e^{i[\Psi_2 + \hat{\phi}_2(t)]} \quad (4)$$

$$\hat{i}_2(t) = -b_1 I_0 \epsilon_1(t - \tau) \quad (5)$$

$$\hat{\phi}_2(t) = -h_1 \epsilon_1(t - \tau) \quad (6)$$

$$b_1 = -\frac{\eta_x}{LE}, \quad h_1 = \frac{R_{56}\omega}{cE} \quad (7)$$

ここで、 η_x は、ERL の周回軌道中で運動量分散が最大となる位置における η_x の値である。 L はビーム損失が起こる割合を表す係数であり、1 mm のずれで 10^{-3} のビーム損失が起こる場合は、 $L = 1$ m と定義する。FEL 発振ではビームのエネルギーが下がる方向に擾乱が加わるので、 b_1 はエネルギーが下がった時に電流が減るように符号を決める。 τ は、ビームが周回に要する時間である。 R_{56} の符号はシケインで $R_{56} > 0$ となるように決める。

二次以上の項を落として摂動を線形化すると、

$$\epsilon_1(t) = \hat{v}(t) \cos \Psi_1 - \hat{\phi}(t) V_{c0} \sin \Psi_1 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{i}_2(t) &= -\hat{v}(t - \tau) b_1 I_0 \cos \Psi_1 \\ &+ \hat{\phi}(t - \tau) b_1 I_0 V_{c0} \sin \Psi_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2(t) &= -\hat{v}(t - \tau) h_1 \cos \Psi_1 \\ &+ \hat{\phi}(t - \tau) h_1 V_{c0} \sin \Psi_1 \end{aligned} \quad (10)$$

これらを式 (1) に代入して、虚部と実部を分けて整理する。さらに、ラプラス変換 $\hat{v}(t) \rightarrow v(s)$ 、 $\hat{\phi}(t) \rightarrow \phi(s)$ を施す。

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ \phi(s) \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

$\det(M) = 0$ を解いて s の根を求めた時に、根の実部が負から正になる点で系は不安定となる。この時の

電流が閾値電流である。上式中の行列の各要素は、以下の通りである。

$$M_{11} = \frac{\omega_0}{2Q_L} + s - \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} A_1 e^{-s\tau} \quad (12)$$

$$M_{12} = V_{c0} \left[\frac{\omega_0}{2Q_L} \tan \Psi - \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} B_1 e^{-s\tau} \right] \quad (13)$$

$$M_{21} = -\frac{\omega_0}{2Q_L} \tan \Psi + \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} C_1 e^{-s\tau} \quad (14)$$

$$M_{22} = V_{c0} \left[s + \frac{\omega_0}{2Q_L} + \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} D_1 e^{-s\tau} \right] \quad (15)$$

$$A_1 = -I_0 (h_1 \sin \Psi_2 - b_1 \cos \Psi_2) \cos \Psi_1 \quad (16)$$

$$B_1 = I_0 (h_1 \sin \Psi_2 - b_1 \cos \Psi_2) \sin \Psi_1 \quad (17)$$

$$C_1 = -I_0 (h_1 \cos \Psi_2 + b_1 \sin \Psi_2) \cos \Psi_1 \quad (18)$$

$$D_1 = I_0 (h_1 \cos \Psi_2 + b_1 \sin \Psi_2) \sin \Psi_1 \quad (19)$$

周回による時間遅れ (τ) が系の時定数 ($2Q_L/\omega_0$) に比べて小さいとき $\tau = 0$ と近似でき、 s の根は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{\omega_0}{2Q_L} \right) \left\{ -1 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} I_0 R_L \left[(h_1 S + b_1 C) \pm \sqrt{X} \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} X &= (h_1 S + b_1 C)^2 + \frac{4 \tan \Psi}{R_L I_0} (-h_1 C + b_1 S) \\ &- \left(\frac{2 \tan \Psi}{R_L I_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$S = -\sin(\Psi_1 + \Psi_2), \quad C = \cos(\Psi_1 + \Psi_2) \quad (22)$$

定常状態で空洞の離調、 $\Psi = 0$ の時 (加速、減速ビームが正確に逆位相に設定されている場合に相当)、不安定性の閾値電流 (平均電流 = 等価電流の半分) は次のように求められる。

$$I_{th,av} = \frac{1}{2R_L(h_1 S + b_1 C)} \quad (23)$$

3. 状態変数による記述

独立に RF 源を備えた空洞が複数台ある場合、さらに、様々な方式のフィードバックを考慮する場合などを取り扱うため、前節で示したモデルを状態変数の記述に直す。

先に示した単一空洞のモデルにおいて、空洞の電圧と位相の変動は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{v}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q_L} \left[\hat{v} + V_{c0} \hat{\phi} \tan \Psi \right] \\ &+ \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} \left[-\hat{i}_2 \cos \Psi_2 + I_0 \hat{\phi}_2 \sin \Psi_2 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q_L V_{c0}} \left[-\hat{v} \tan \Psi + V_{c0} \hat{\phi} \right] \\ &+ \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L V_{c0}} \left[-\hat{i}_2 \sin \Psi_2 - I_0 \hat{\phi}_2 \cos \Psi_2 \right] \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、入射ビームには変動がないとした。

加速空洞の振幅と位相の偏差 ($\hat{v}, \hat{\phi}$) を状態変数とし、減速ビームの電流と位相の偏差 ($\hat{i}_2, \hat{\phi}_2$) を入力変数と考えると、偏差方程式 (24) (25) は、以下のようになる

$$\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad (26)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$A = \frac{\omega_0}{2Q_L} \begin{pmatrix} -1 & -V_{c0} \tan \Psi \\ \frac{\tan \Psi}{V_{c0}} & -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$B = \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} \begin{pmatrix} -\cos \Psi_2 & I_0 \sin \Psi_2 \\ \frac{-1}{V_{c0}} \sin \Psi_2 & \frac{-1}{V_{c0}} I_0 \cos \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

周回軌道におけるビーム損失、ビーム位相誤差のモデルを論文 [2] と同様に選ぶと、減速ビームは

$$\vec{u}(t) = C\vec{x}(t - \tau) \quad (30)$$

$$C = \begin{pmatrix} -b_1 I_0 \cos \Psi_1 & -b_1 I_0 V_{c0} \sin \Psi_1 \\ -h_1 \cos \Psi_1 & -h_1 V_{c0} \sin \Psi_1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

と書けるので、系全体は Fig.2 のようになる。周回の時間遅れを無視すると、閉ループ系は $\vec{x}(t) = (A + BC)\vec{x}$ となる。安定性の条件は、行列 $(A + BC)$ の特性根の実部が負であることであり、論文 [2] の線形解析の結果と一致する。

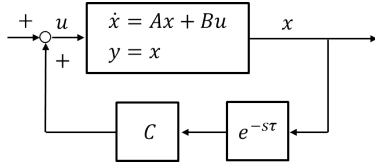


Figure 2: 空洞と周回軌道を含んだシステムの状態変数線図。

4. フィードバックの追加

RF のフィードバック制御を追加するため、空洞モデルにおいて、高周波源の等価電流 I_g の振幅と位相を可変とする。

$$\hat{I}_g = [I_{g0} + \hat{i}_g(t)] \exp(i[\Psi_{g0} + \hat{\phi}_g(t)]) \quad (32)$$

定常状態でビームローディングなし (完全なエネルギー回収)、空洞の離調なし ($\Psi = 0$) とすると、 $\Psi_{g0} = 0$ 、 $I_{g0} = V_c/R_L$ となる。

入力変数 \vec{u} に空洞フィードバックを含める。

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{i}_g \\ \hat{\phi}_g \end{pmatrix} \quad (33)$$

フィードバックを含んだ空洞電場の変化は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{v}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q_L} [\hat{v} + V_{c0}\hat{\phi} \tan \Psi] \\ &+ \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} [-\hat{i}_2 \cos \Psi_2 \\ &+ I_0 \hat{\phi}_2 \sin \Psi_2 + \hat{i}_g] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q_L V_{c0}} [-\hat{v} \tan \Psi + V_{c0}\hat{\phi}] \\ &+ \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L V_{c0}} [-\hat{i}_2 \sin \Psi_2 \\ &- I_0 \hat{\phi}_2 \cos \Psi_2 + I_{g0}\hat{\phi}_g] \end{aligned} \quad (35)$$

上式から状態方程式 $\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$ における B が求められる。

5. シミュレーション

EUV リソグラフィのための高出力 FEL として検討中の 800-MeV ERL [3] を例にとり、単一空洞モデルにおける RF 不安定性現象について、数値シミュレーションで閾値電流を確認する。シミュレーションは Scilab/Xcos [4] を利用した。

計算に用いたパラメータは以下の通りである。

- 入射エネルギー = 10 MeV、周回エネルギー = 800 MeV、空洞離調 $\Psi = 0$
- $(R/Q) = 10^3 \Omega$ 、 $Q_L = 10^7 \rightarrow R_L = 10^{10} \Omega$
- ビーム位相: 加速 $\Psi_1 = 7 \text{ deg}$ 、減速 $\Psi_2 = 187 \text{ deg}$
- ビーム損失: $\eta_x = 1 \text{ m}$ 、 $L = 1 \text{ m}$
- 周回軌道全体でアイソクロナス $R_{56} = 0$

これらパラメータに基づいて、線形解析による閾値電流を式 (23) から求めると、 $I_{th,av} = 41 \text{ mA}$ となる。

シミュレーションでは、空洞電圧の変動の初期値を $v(t=0) = -0.1 \text{ V}$ 、周回の時間遅れなしとした場合の空洞電圧の時間変化を計算した。Fig.3 に示のように、閾値電流を超えると、空洞電圧が指数関数的に低下し、RF 不安定性現象が起こることがわかる。

つぎに、フィードバックがある場合の計算を示す。空洞の振幅と位相について、PID 制御をおこなう。振幅と位相の偏差から高周波源の等価電流への換算を以下の式で行う。

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_g \\ \hat{\phi}_g \end{pmatrix} = D\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/R_L & 0 \\ 0 & 1/R_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Fig.4 に、フィードバック制御を含んだ Scilab/Xcos のモデルを示す。

フィードバック制御を施すことで閾値電流を超えても RF 不安定性を抑制できることを確認するため、Scilab/Xcos でシミュレーションを行った。シミュレー

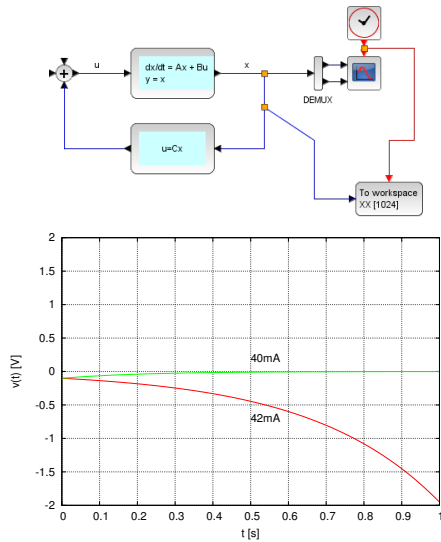


Figure 3: Scilab/Xcos による計算結果。不安定性の閾値電流 (41 mA) の前後での様子を確認するため、40 mA と 42 mA の結果を示す。

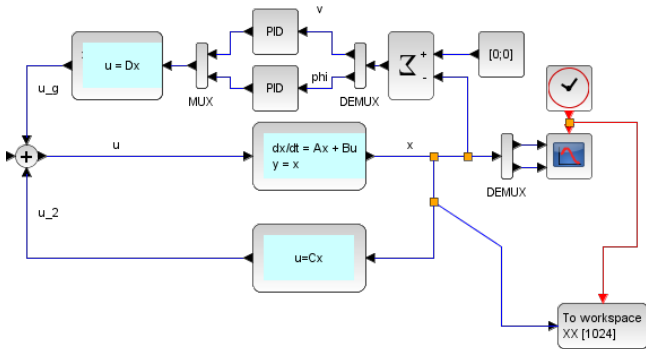


Figure 4: Scilab/Xcos によるモデル。

シミュレーションに用いた空洞、周回軌道のモデルは前節の計算と同じである。PID パラメータは、 v 、 ϕ ともに [5 1 0] とした。シミュレーションの結果を Fig.5 に示す。閾値電流 (41 mA) をを超える平均電流 100 mA でも安定化できることがわかる。周回軌道がアイソクロナスでない場合 ($R_{56} = \pm 0.2 \text{ m}$) でも、同様に安定化できることが示されている。

6. マイクロフォニクスとの比較

前節では、減速ビームに損失や位相誤差が生じた時にフィードバックを行うことで、空洞の振幅と位相を設定値に戻せることを示したが、これには RF 源の出力に余裕が必要である。

減速ビームの変動とは独立に、空洞のフィードバックが必要な事象としてマイクロフォニクスがある。外部からの振動により空洞が変形すると共振周波数が変わる (離調する) ので、これを補正するためのフィードバックが必要であるためである。ERL では加速ビームと減速ビームがビーム負荷を打ち消すので、主カップラーのカップリングを小さく (loaded Q を大きく)

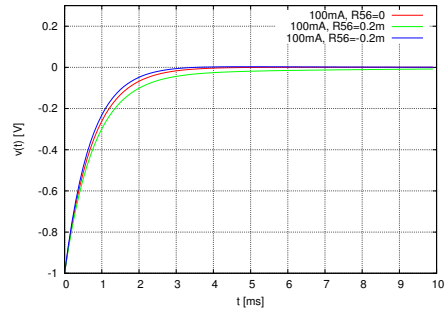


Figure 5: Scilab/Xcos による計算結果。800-MeV ERL において、フィードバック制御を施した場合。電流 100 mA、アイソクロナス条件 ($R_{56} = 0$)、非アイソクロナス条件 ($R_{56} = \pm 0.2 \text{ m}$)、いずれの場合も安定化できる。

設定するが、loaded Q が大きくなるほど空洞の共振帯域が狭くなり、空洞変形による離調の影響が大きくなる。

減速ビームの擾乱の効果とマイクロフォニクスの効果、どちらが支配的となるのか見積もっておくことは、ERL の設計において有用であろう。

Figure 6 は空洞に生じる電界、ビーム負荷が作る電界、RF 源が作る電界の関係を示したものである。空洞が離調した場合 (下図) も示している。ビーム電流の変化 (\hat{i}_b)、ビーム位相の変化 (Ψ_b)、共振周波数の変化 (Ψ) があつた場合、いずれも、入力 RF を増減して空洞に生じる電界を一定に保つ必要がある。必要な高周波源のパワーは、

$$P_g = \frac{V_c^2 (1 + \beta)}{R_L 4\beta} \left\{ \left[1 + \frac{I_0 R_L}{V_c} \cos \Psi_b \right]^2 + \left[\tan \Psi - \frac{I_0 R_L}{V_c} \sin \Psi_b \right]^2 \right\} \quad (37)$$

と表される。ここで、 Ψ (空洞離調) を適切に選べば、右辺の第二項をゼロとできる。

空洞の加速電圧を $V_c = 15 \text{ MV}$ 、 Q_L を 1×10^7 、 3×10^7 とした時、マイクロフォニクスによる空洞の離調 (δf) とこれを補償するのに必要な RF 入力を計算したのが Table 1 である。

同様に、 $V_c = 15 \text{ MV}$ 、 $\Psi_1 = 0$ の時、減速ビームの損失とこれを補償するための RF パワーは Table 2 のように計算できる。

最後に減速ビームに位相誤差が生じた時に必要となる RF パワーを計算した結果を Table 3 に示す。 $V_c = 15 \text{ MV}$ 、電流 10 mA、 $\Psi_1 = 7 \text{ deg.}$ 、チューナ固定 ($\Psi = 0$)、チューナ可変 ($\Psi \neq 0$) の場合を計算した。FEL 発振によるエネルギー変化と位相誤差の関係は、FEL アンジュレータから主加速器再入射までの R_{56} で決まる。例えば、 $R_{56} = 0.2 \text{ m}$ 、 $\Delta E/E = 1\%$ とすると減速ビームの位相変化は 3 deg. となる。

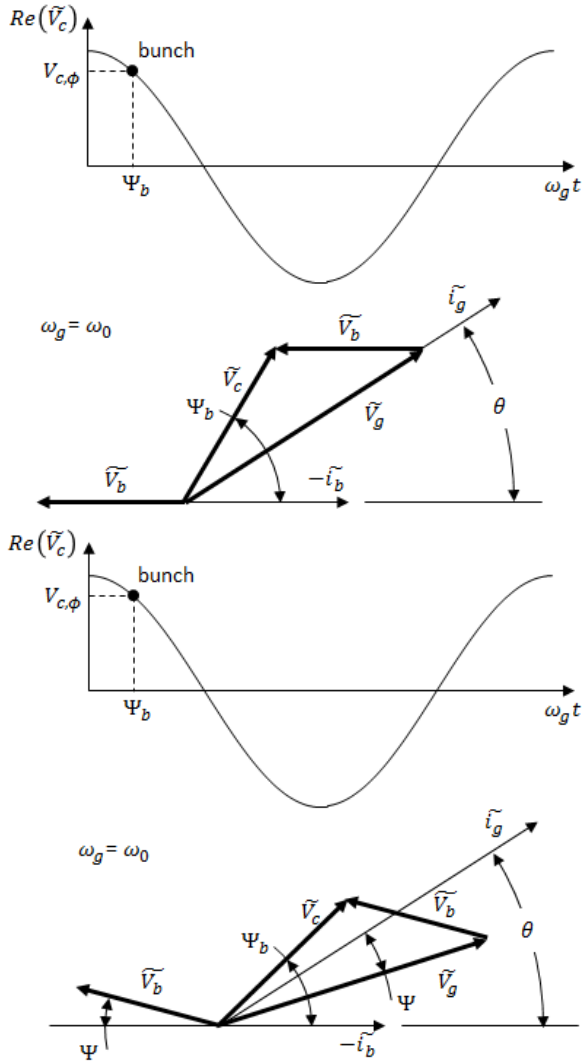


Figure 6: 空洞に生じる電界、ビーム負荷が作る電界、RF 源が作る電界の関係図。(上) 空洞離調がない場合、(下) 空洞離調がある場合。

Table 1: 空洞の加速電圧を $V_c = 15$ MV、 Q_L を 1×10^7 、 3×10^7 とした場合の、空洞の離調と離調を補償するのに必要な RF パワー。

Q_L	δf (Hz)	P_g (kW)
1×10^7	0	5.63
	10	5.76
	30	6.83
3×10^7	0	1.88
	10	2.28
	30	5.49

7. まとめ

ERL における RF 不安定性とは、ビーム損失、ビーム位相の擾乱により RF 空洞の負荷バランスが乱れて、空洞電圧 (位相) が指数関数的に変動する現象である。単一空洞では、周回軌道のモデル (ビーム損失、

Table 2: 空洞の加速電圧を $V_c = 15$ MV、 Q_L を 1×10^7 、 3×10^7 とした場合の、周回ビームの電流損失とこれを補償するのに必要な RF パワー。

Q_L	loss (μ A)	P_g (kW)
1×10^7	0	5.63
	10	5.71
	100	6.41
3×10^7	0	1.88
	10	1.96
	100	2.71

Table 3: 減速ビームに位相誤差が生じた時に必要となる RF パワー。 $V_c = 15$ MV、電流 10 mA、 $\Psi_1 = 7$ deg.、チューナ固定 ($\Psi = 0$)、チューナ可変 ($\Psi \neq 0$) の場合。

Q_L	Ψ_2 (deg)	P_g (kW)	P_g (kW)	δf (Hz)
		($\Psi = 0$)	($\Psi \neq 0$)	
1×10^7	187	5.63	5.63	0
	190	6.90	6.23	22.3
	193	9.74	7.08	44.5
	196	14.1	8.22	66.2
3×10^7	187	1.88	1.88	0
	190	4.52	2.51	22.3
	193	11.5	3.51	44.5
	196	22.8	4.97	66.2

ビーム位相) を仮定し、線形解析を行うことで、不安定性の閾値電流が求められる。空洞の電圧と位相はフィードバックで制御可能であり、閾値電流を超えても安定化できる点で、RF 不安定性は HOM-BBU と異なる。周回軌道による時間遅れ、FEL によるビームの擾乱、非線形ビーム損失モデル、複数空洞が存在する場合などに対して RF 安定性を議論するにはシミュレーションが必要である。本稿で示した状態方程式による定式化と Scilab/Xcos を使えば、このようなシミュレーションが可能である。ERL-FEL では、FEL 発振にともなうエネルギー変化と減速ビーム位相変化があり、周回軌道全体をアイソクロナスにしても、これは避けられない。マイクロフォニクスも含めて、loaded Q の最適値、RF 制御の精度と限界、周回軌道のエネルギーアクセプタンス、 R_{56} の設定などを検討すべきである。

参考文献

- [1] E. Pozdeyev, C. Tennant, J.J. Bisognano, M. Sawamura, R. Hajima, T.I. Smith, Nucl. Instr. Meth. A557, 176 (2006).
- [2] L. Merminga and J.J. Bisoganano, "Energy stability in a high average power FEL", in Proc. PAC-95.
- [3] N. Nakamura *et al.*, MOPCTH10, Proc. of ERL2015, June 7-12, Stony Brook, NY, USA, pp.4-9 (2015).
- [4] <http://www.scilab.org/>