Development of Simulation Code using Envelope Equations

Jun Yamazaki[1A)], Atsushi Enomoto[B)], Yukihide Kamiya[B)]
[A] Institute for Solid State Physics, University of Tokyo
5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba 277-8581
[B)] High Energy Accelerator Reserch Organization
1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki 305-0801

Abstract

A simulation code for ERL injector was developed. This code uses both equations of envelope and longitudinal motion. The parameters of the injector are optimised by calculating correlation coefficients of sliced envelopes.

エンベロープ方程式によるシミュレーションコードの開発

１．はじめに

エネルギー回収型線形加速器（ERL）の入射器で超低エミッタンス・低エネルギービームを実現するために、シミュレーションコードを開発した。SerafiniとRosenzweigは、電子の集団(バンチ)を等間隔にスライスし、各スライスのエンベロープを使ってエミッタンスの増大を抑制する方法を議論している[1]。この方法は、電子が光速に近い場合は有効であるが、上記のような低エネルギーのビームの場合には、速度変化による効果をより正確に取り扱わなければならない。本報告では、スライスしたビームの縦（進行方向）の運動とエンベロープ方程式（横方向）を同時に解き、各スライスでのエンベロープ(a)とその微分(a')からaa'空間における粒子分布の「相関係数」を求める。「相関係数」がゼロならば、rr'位相空間における各スライスのビーム楕円が重なり、ビームの射影エミッタンスが（ほぼ）最小になると見なすことができ、これから、ビーム輸送系の最適化を図ることができる。

２．シミュレーションに用いた計算方法

縦の運動の計算式

縦の運動は式2.1の差分式を用いてマクロ粒子に対して計算される。ここで、進行方向の座標をs [m]、運動エネルギーを$E(s)$ [MeV]、縦の空間電荷場を$E_{\mathrm{long}}(s)$ [MV/m]、加速電場を$E_{RF,z}(s)$ [MV/m]、粒子の時間（clock）を$T(s)$ [s]、光速をc [m/s]、光速に対する粒子の速度比を$\beta(s)$、ローレンツファクターを$\gamma(s)$、素電荷をq [C]とした。また、差分計算のステップ幅はΔs [m]で、i番目のマクロ粒子の座標は$z_i(s)$ [m]、運動エネルギーは$E_i(s)$ [MV/m]、各粒子の時間は$t_i(s)$ [s]、各粒子の光速に対する速度比は$\beta_i(s)$、ローレンツファクターは$\gamma_i(s)$である。

$$E(s+\Delta s)=E(s)+q\left[E_{Long}(s)+E_{RF,z}\left(s+\frac{\Delta s}{2}\right)\right]\Delta s$$

$$\begin{aligned}&\gamma(s)=1+E(s)/0.511\\&\beta(s)=\sqrt{1-1/\gamma(s)^2}\\&T(s+\Delta s)=T(s)+\Delta s/\beta(s)\gamma(s)\end{aligned}\qquad(2.1)$$

横方向の運動の計算式

横方向の運動には、各スライスに式2.2のエンベロープ方程式を用いる。

$$\frac{d^2a_i(s)}{ds^2}+\frac{\gamma_i'(s)}{\beta_i(s)^2\gamma_i(s)}\frac{da_i(s)}{ds}+k_i(s)a_i(s)-K_n(s)a_i(s)-\frac{\varepsilon_i(s)^2}{a_i(s)^3}=0\qquad(2.2)$$

ここで、iは、i番目のスライスで、ビーム径を$a_i(s)$ [m]、とその微分を$a'_i(s)=da_i(s)/ds$、外力のk値を$k_i(s)$ [1/m]、空間電荷場のk値を$K_n(s)$ [1/m]、初期の非規格化エミッタンスをε_i [mm mrad]とする。

ソレノイド磁石のk値は、

$$k_i(s)=\left(\frac{qB}{2m_0c\beta_i(s)\gamma_i(s)}\right)^2\qquad(2.3)$$

で与えられる。ここで、B [T]、m_0 [kg]は、ソレノイド磁石の磁束密度、電子の静止質量である。

加速管のk値は、動径方向のRF場$E_{r,i}(s)$ [V/m]、

[1]E-mail: yamazaki@issp.u-tokyo.ac.jp

周回方向の磁束密度$B_{\theta,i}$（s） [T]とすると、

$$k_i(s) = -\frac{q}{m_0\gamma_i(s)(c\beta_i(s))^2}\left(E_{ri}(s) - c\beta_i(s)B_{\theta i}(s)\right) \tag{2.4}$$

で与えられる。

式2.2のエンベロープ方程式を解くのに、次の式2.5の差分式を用いている。ここでのステップ幅はΔs_Tで、式2.1のステップ幅Δsをさらに数～数十分割したもの（実際には、Runge-Kutta-Ferlberg法で求めている）を使う。

$$\begin{pmatrix} a_i(s+\Delta s_T) \\ a'_i(s+\Delta s_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta_i(s)\gamma_i(s)}{\beta_i(s+\Delta s_T)\gamma_i(s+\Delta s_T)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Delta s_T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(-k_i(s) + K_n(s) + \dfrac{\varepsilon_i^2}{a_i(s)^4}\right)\Delta s_T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i(s) \\ a'_i(s) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

空間電荷場

空間電荷場の式としては、PARMELAで用いられている空間電荷場の計算式 [2]を線形化近似したものを採用している。

ここで、縦の空間電荷場をE_{Trans}（s） [V/m]、進行方向の座標s_1 [m]、sgn($s-s_1$)は$s-s_1$の符号、sの位置での電荷密度を$q(s)$ [C/m^3]、電子のGeneralized perveance をI_0=17000 [A]、ピーク電流を$I(s)$ [A/m]としている。縦の空間電荷場は、

$$E_{long}(s) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int \gamma(s_1)ds_1 q(s_1)\mathrm{sgn}(s-s_1)$$
$$\times\left(1 - \frac{\gamma(s_1)|s-s_1|}{\sqrt{a(s_1)^2 + \gamma(s_1)^2|s-s_1|^2}}\right) \tag{2.6}$$

であり、また、横の空間電荷場とそのk値は、

$$E_{Trans,n}(s) = \frac{a(s)}{4\varepsilon_0}\int \gamma(s_1)ds_1 q(s_1)a(s_1)^2$$
$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{a(s_1)^2 + \gamma(s_1)^2|s-s_1|^2}}\right)^3 = \frac{a(s)}{4\varepsilon_0}I(s)$$

$$K_n(s) = \frac{\pi I(s)}{I_0(\beta_i(s)\gamma_i(s))^2} \tag{2.7}$$

と与えられる。

この空間電荷場をスライスごとに細分して計算すると値がばらつくことや計算速度が遅くなるため、バンチを大きめの領域、Cell（バケツ）に分割（数十分割）して計算している。n番目のバケツの空間電荷場のk値をK_n（s）[1/m]とし、大部分の計算では、そのバケツ内にある複数のエンベロープのうちで、最大エンベロープを$a_{z\ n}$（s）[m]として空間電荷場の計算に用いている（$a_{z\ n}$（s）として、異なるものを用いた場合についても結果には大きな差はないことを確認している）。

３．相関係数と射影エミッタンス

エンベロープ方程式のみではエミッタンスの絶対値を求めることができないので、ここでは、以下のように、規格化エミッタンスの式に類似した「相関係数」を定義して、パラメータの最適化に利用する。この「相関係数」$Cor(s)$は、進行方向の位置、ｓで

$$Cor(s) = \frac{\beta(s)\gamma(s)}{4N_a}\sqrt{\sum_{i=1}^{Na}a_i(s)^2\sum_{i=1}^{Na}a'_i(s)^2 - \left(\sum_{i=1}^{Na}a_i(s)a'_i(s)\right)^2} \tag{3.1}$$

で与えられるものである。ここで、N_aはスライスの総数である。

以下に、この相関係数と射影エミッタンスの関係について説明する。粒子の動径方向の位置$r(s)$、Twssパラメータα_{twiss}(s)、β_{twiss} (s)、γ_{twiss}(s)とエミッタンスεの関係は、よく知られているように図3.1で与えられる。

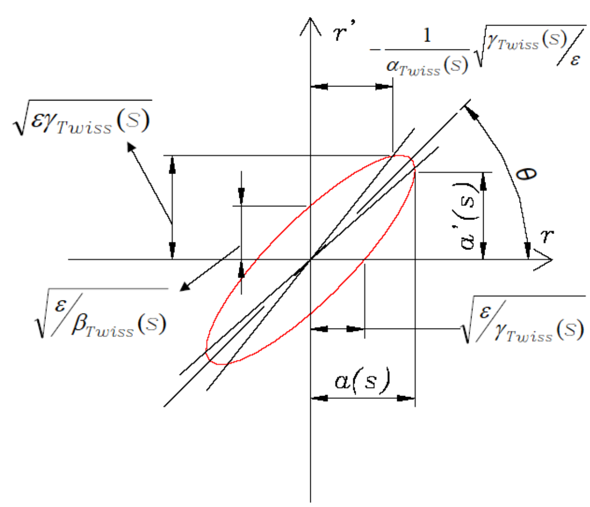

図3.1　Twissパラメータと位相空間の関係

ここで、位相空間上の楕円（エミッタンス）の傾きθは、

$$\tan 2\theta = \frac{2\alpha_{Twiss}(s)}{\gamma_{Twiss}(s) - \beta_{Twiss}(s)} = \frac{2\alpha_{Twiss}(s)\beta_{Twiss}(s)}{1+\alpha_{Twiss}(s)^2 - \beta_{Twiss}(s)} \quad (3.2)$$

と与えられるが、α_{Twiss}(s)が非常に大きい場合には、aa'空間上の傾きa'(s)/a(s)とtan θ との間には次のような簡単な関係が成り立つ。

$$-\frac{\sqrt{1+\alpha_{Twiss}(s)^2}}{\beta_{Twiss}(s)} \cong \tan\theta \cong -\frac{\alpha_{Twiss}(s)}{\beta_{Twiss}(s)} = \frac{a'(s)}{a(s)} \quad (3.3)$$

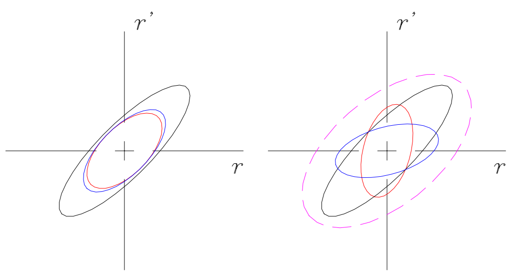

図3. 2　スライスエミッタンスと射影エミッタンス

つまり、a'/aは楕円の傾きとほぼ等しくなる。このことから、式3.1で定義した「相関係数」を使うと、各スライスの位相空間上の重なり具合を調べることができる。図3.2の左図のように、ビーム楕円の主軸が一致する場合には、「相関係数」はゼロとなり、射影エミッタンスもほぼ最小値をとることになる。一方、図3.2の右図のように各スライスのビーム楕円の主軸が一致しなくなると、「相関係数」はゼロとは異なり、また射影エミッタンスも増大することになる。

3. まとめ

本コードの計算速度はPARMELAの数十倍の速さであり、「相関係数」を用いることによって、最適パラメータを容易に求めることが可能である。今回開発したコードは、ERLにおける低エネルギーのビーム輸送モデルの最適化に利用した[3]。

5. 謝辞

本研究を行うにあたり、斉藤健治(KEK)、梅森健成(KEK)には加速管の設計データを提供していただき感謝します。早野仁司（KEK）、羽島良一（JAEA）、宮島司(KEK)には、ご助言等をいただき感謝します。

参考文献

[1] L.Serafini, et al., Physical Review Vol55, 7565,1997
[2] P.Lapostolle, et al., Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A Vol379, 21-40,1996
[3] J.Yamazaki, et al., “第六回日本加速器学会年会”, 東海村, Aug. 5-7, 2009