

Analysis of Stripline Pickups using A Multiconductor-transmission-line Model

Takeshi Toyama¹

High Energy Accelerator Research Organization (KEK)

1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki, 305-0801

Abstract

An improved stripline pickup analysis using a multiconductor transmission line (MTL) model, which comprises a 2D electrostatic problem on a pickup cross section and boundary conditions at the pickup terminals. This may be recognized as 2.5D model because the 3D effect is included in the boundary conditions. This model can be applied to problems of arbitrary cross-section pickups and with pickup couplings.

ストリップライン ピックアップの多導体伝送線路モデル

1. はじめに

ストリップライン ピックアップ (PU) の解析的な取扱い [1, 2] では、ビームの発生する電磁場と PU とのカップリングが一般的ではない。さらに複数の PU 相互の電磁氣的結合は取り扱えない。ここでは、複雑な 3D 数値計算に持ち込まず 2D 静電場計算によりこれらを解決するモデルを提案する。PU が、2D 問題で近似できる電極部分、および端末部分とから構成されるとして、多導体伝送線路により記述する。

2. ストリップライン 1 本の場合

図 1 に示すような PU 1 本の場合をモデル化する。ビームは光速で走っていると仮定する。まず、PU 中央部分を無限長 2D 問題と考える。ビーム静止系では [3]、ビームの位置を (x_0, y_0) とし、点 (x, y) におけるポテンシャルは、ビーム、PU 上の線電荷密度をそれぞれ λ_0, λ_1 、電位係数を p_{10}, p_{11} とすると

$$V_1(x, y, x_0, y_0) = p_{10}(x, y, x_0, y_0)\lambda_0(x_0, y_0) + p_{11}(x, y)\lambda_1,$$

と書ける。実験室系に移ると、TEM 波の性質から電場、磁場は [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\tau &= -\nabla_\tau V_1 e^{\mp jk_0 z} \\ &= \begin{cases} -\nabla_\tau (p_{10}\lambda_{0+} + p_{11}\lambda_{1+}) e^{-jk_0 z} \\ -\nabla_\tau (p_{11}\lambda_{1-}) e^{+jk_0 z} \end{cases} \\ \mathbf{H}_\tau &= \pm Y_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\tau V_1 e^{\mp jk_0 z} \\ &= \begin{cases} +Y_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\tau (p_{10}\lambda_{0+} + p_{11}\lambda_{1+}) e^{-jk_0 z} \\ -Y_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\tau (p_{11}\lambda_{1-}) e^{+jk_0 z} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで $Y_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ 、 ∇_τ は横方向の gradient である。ビームダクト表面から PU 表面までの線積分によって PU の電位が求められる。

$$V_{1\pm} e^{\mp jk_0 z} = \begin{cases} (p_{10}\lambda_{0+} + p_{11}\lambda_{1+}) e^{-jk_0 z} \\ p_{11}\lambda_{1-} e^{+jk_0 z} \end{cases} \quad (1)$$

また、PU を流れる電流は、磁場の接線成分を PU 断面を囲む線に沿って積分して得られる。ビームからの寄与 (p_{10}) はゼロで、PU 自身の寄与 (p_{11}) のみが残ることがわかる。

$$I_{1\pm} e^{\mp jk_0 z} = \oint_C \mathbf{H}_\tau \cdot d\mathbf{s} = \pm c\lambda_{1\pm} e^{\mp jk_0 z}. \quad (2)$$

$V_{1+}, V_{1-}, I_{1+}, I_{1-}$ を一意的に定めるためには境界条件が必要である。上流端、下流端にてそれぞれ R_0, R_ℓ で終端された場合を考える：

$$V_{1+} + V_{1-} = -R_0(I_{1+} + I_{1-}),$$

$$V_{1+} e^{-jk_0 \ell} + V_{1-} e^{jk_0 \ell} = R_\ell(I_{1+} e^{-jk_0 \ell} + I_{1-} e^{jk_0 \ell}).$$

上流端、下流端での電圧を求めると、それぞれ $V_1(0) = V_{1+} + V_{1-}$

$$\begin{aligned} &= \frac{cp_{10}R_0(p_{11} + cR_\ell)\sin(k_0\ell)\lambda_0}{-jcp_{11}(R_0 + R_\ell)\cos(k_0\ell) + (p_{11}^2 + c^2R_0R_\ell)\sin(k_0\ell)} \\ V_1(\ell) &= V_{1+} e^{-jk_0 \ell} + V_{1-} e^{+jk_0 \ell} \\ &= \frac{-2jcp_{10}(p_{11} - cR_0)R_2 \sin(k_0\ell)\lambda_0}{-(p_{11} - cR_0)(p_{11} - cR_\ell) + e^{2jk_0 \ell}(p_{11} + cR_0)(p_{11} + cR_\ell)} \end{aligned}$$

となる。 $Z_c = p_{11}/c = 1/cC_1$ (C_1 は静電容量) を考慮すると、 $p_{11} - cR_0 = c(Z_c - R_0)$ となり、上流端でインピーダンス整合した場合は下流端で出力が無いことがわかる。

電圧、電流が満たす方程式を求めると、

$$\frac{dV_1}{dz} + j\omega L_1 I_1 = -j \frac{k_0 p_{10}}{c^2} I_0 e^{-jk_0 z} \quad (3)$$

$$\frac{dI_1}{dz} + j\omega C_1 V_1 = j \frac{k_0 p_{10}}{cZ_c} I_0 e^{-jk_0 z} \quad (4)$$

が得られる。ここで、 $I_0 = c\lambda_0$ 、 $p_{11} = 1/C_1$ 、 $Z_c = cL_1 = 1/cC_1$ を使った。

図 1 のような形状では、 p_{10} は Green の相反定理を使って、 p_{11} は鏡像法、あるいは等角写像によって、下記の様に求められる [3]：

¹ E-mail: takeshi.toyama@kek.jp

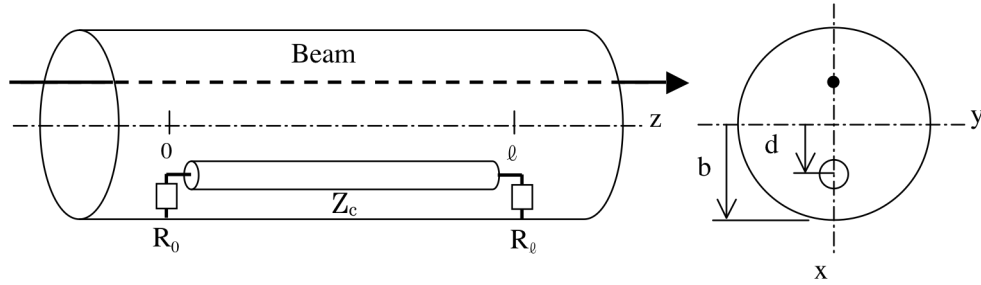


図1 : PU 1 本からなる場合.PU半径: a, 中心軸の位置: (d, 0), ビームダクト内径: b.

$$p_{10}(x, y, d, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \text{Log} \frac{(x-d_2)^2 + y^2}{(x-d-d_1)^2 + y^2} - 2 \text{Log} \frac{d_2-b}{b-d-d_1} \right\},$$

$$p_{11}(d, 0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cosh^{-1} \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}.$$

ただし、

$$d_1(d_2 - d) = a^2, \quad (d + d_1)d_2 = b^2,$$

である。

(例1) PUの特性インピーダンス50Ω、両端末で整合している場合

a=1.5mm, b=67mm, d=65mm, Z_c=50Ω, ℓ=180mm とする。ビームがz軸にある場合を考える。電位係数はそれぞれ

$$p_{10}(0, 0, d, 0) = 3.88 \times 10^8$$

$$p_{11}(d, 0) = 1.50 \times 10^{10}$$

となる。Transfer impedance (Z_{||} = V₁(0)/I₀)を求めた結果を図2に示す。それを[1][2]の計算式

$$Z_{up}(\omega) = jZ_c \frac{\phi}{2\pi} e^{-j\theta} \sin\theta$$

$$|Z_{Barry}(\omega)| = \frac{\mu_0 c}{2\pi Z_c} \text{Log}\left(\frac{b}{d}\right) R_0 |\sin\theta|$$

$$\theta = \omega\ell/c$$

に代入した結果も示した。[1]は円筒面の一部を切り取った形状の電極を仮定している。[2]は太さゼロのワイヤーを仮定している。例1の形状は、どちらによっても近似が悪いため、図2の結果になったと考えられる。

(例2) PUの特性インピーダンス202Ω、下流端末でショートしている場合(J-PARC MRに設置した"Single Pass Monitor (SPM)"のパラメータ)

a=1.5mm, b=92mm, d=67mm, Z_c=202Ω, ℓ=180mmとする。電位係数はそれぞれ

$$p_{10}(0, 0, d, 0) = 5.70 \times 10^9$$

$$p_{11}(d, 0) = 6.05 \times 10^{10}$$

となる。Transfer impedance を求めると図3のようになる。それを[2]の計算式

$$|Z_{Barry}(\omega)| = \frac{\mu_0 c}{2\pi Z_c} \text{Log}\left(\frac{b}{d}\right) R_0 |\sin\theta| / \sqrt{\left(\frac{R_0}{Z_c}\right)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

に代入した結果も示した。この場合、[2]の太さゼロのワイヤーの近似が良いと考えられる。また、低周波特性ではJ-PARC MRのSPMのワイヤー校正データと良く合っている。

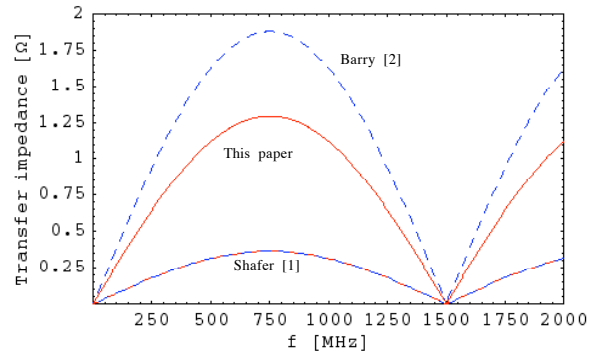


図2 : 例1の断面の場合のtransfer impedanceの周波数特性。

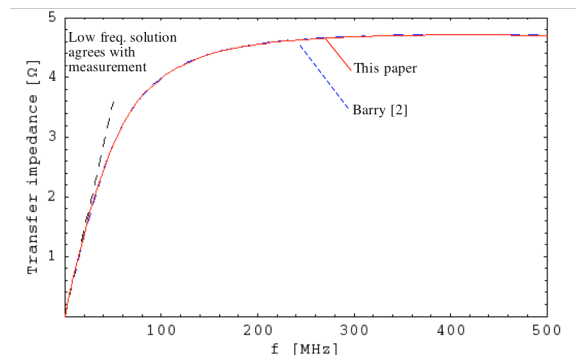


図3 : 例2の断面の場合のtransfer impedanceの周波数特性。

ここで、従来の伝送線路モデル[1,2]との関連について述べる。PUに発生する電圧は、上記の通り、電圧は、ビーム電荷に誘導される部分 (V_i) と、PU上の電荷、電流による部分 (V_s) からなる。これを使って方程式を書き直すと

$$\frac{dV_{1s}}{dz} + j\omega L_1 I_1 = 0$$

$$\frac{dI_1}{dz} + j\omega C_1 V_{1s} = 0$$

となる。ビームの影響は境界条件のみに現れる [6]。

$$V_{1s}(0) = -V_{1i}(0) - R_1 I_1(0)$$

$$V_{1s}(\ell) = -V_{1i}(\ell) + R_2 I_1(\ell)$$

電圧源を等価電流源に置き換えれば、良く使われる等価回路が得られる。

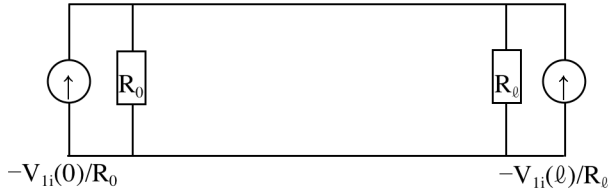


図4：等価回路。ビームがPUに誘起する信号を端末の等価電流源に置きかえた。

3. ストリップラインn本の場合

上記の議論を、PUがn本の場合に拡張する。各導体 (PU) の線電荷密度と各電圧との関係は、誘導・容量係数行列によって

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{C}\mathbf{V}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

と表される。同様に、磁束密度と電流の関係は自己・相互誘導係数行列によって

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}\mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

と表される。単位行列を \mathbf{E} と書くと

$$\mathbf{L}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{L} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = 1/c^2 \mathbf{E}$$

が成り立つ。これらを使うと式(3)(4)は下記のようになる：

$$\frac{d}{dz} \mathbf{V} + j\omega \mathbf{L}\mathbf{I} = -j \frac{k_0}{c^2} I_0 e^{-jk_0 z} \mathbf{P}_0,$$

$$\frac{d}{dz} \mathbf{I} + j\omega \mathbf{C}\mathbf{V} = j \frac{k_0}{cZ_c} I_0 e^{-jk_0 z} \mathbf{P}_0.$$

ここで、ビーム電荷による各PUでの静電誘導を表す係数を

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} p_{10} \\ \vdots \\ p_{n0} \end{pmatrix}$$

とおいた。これを

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{V}(z) \\ \mathbf{I}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -j\omega \mathbf{L} \\ -j\omega \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}(z) \\ \mathbf{I}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{V}_F(z) \\ \mathbf{I}_F(z) \end{pmatrix}$$

と書きかえると、制御理論の状態方程式と同じ形に

なる [6]。これの形式的な解は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}(z) \\ \mathbf{I}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(z) & \Phi_{12}(z) \\ \Phi_{21}(z) & \Phi_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^z [\Phi_{11}(z-\tau) \mathbf{V}_F(\tau) + \Phi_{12}(z-\tau) \mathbf{I}_F(\tau)] d\tau \\ \int_0^z [\Phi_{21}(z-\tau) \mathbf{V}_F(\tau) + \Phi_{22}(z-\tau) \mathbf{I}_F(\tau)] d\tau \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{11}(z) = \Phi_{22}(z) = \cos(k_0 z) \mathbf{E}$$

$$\Phi_{12}(z) = -j c \sin(k_0 z) \mathbf{L}$$

$$\Phi_{21}(z) = -j c \sin(k_0 z) \mathbf{C}$$

である。 $\mathbf{V}(0)$ 、 $\mathbf{V}(\ell)$ あるいは $\mathbf{I}(0)$ 、 $\mathbf{I}(\ell)$ を一意的には解くために端末の境界条件を課す。典型的な例として、上流端 ($z=0$)、下流端 ($z=\ell$) で、それぞれ

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} R_{01} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_{0n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_\ell = \begin{pmatrix} R_{\ell 1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\ell n} \end{pmatrix}$$

により終端する場合の境界条件は、

$$\mathbf{V}(0) = -\mathbf{R}_0 \mathbf{I}(0)$$

$$\mathbf{V}(\ell) = \mathbf{R}_\ell \mathbf{I}(\ell)$$

となる。

4. まとめ

本稿では、2D静電場計算、およびPU端末の境界条件を使うことにより、任意の2次元形状 (両端末間でz軸方向に一様) に対応し、PU間のカップリングの効果も計算できる多導体伝送線路モデルを提案した。系を特徴づけるパラメータは、導体 (PU) の誘導・容量係数、ビーム軸方向の電極長、終端インピーダンス、およびビームによるPUの誘導係数で特徴づけられる。

PU 1本の場合について、2つの例で、従来の計算方法と本稿の方法を比較した。3Dシミュレーションでの検証が課題である。

さらに、n本のPUの場合について、多導体伝送線路モデルによる形式的な解法を示した。導体間のカップリングが誘導係数 C_{ij} ($i \neq j$) で表現されている。

具体例への適用は今後の課題である。

また、ワイヤー校正についても、ビームを導体と置き換えることによって解析が可能となる。

参考文献

- [1] R. E. Shafer, IEEE NS-32 (1985) 1933.
- [2] W. Barry, NIM A301(1991)407-416.
- [3] J. H. Cupérus, NIM145 (1977) 219-231.
- [4] 後藤憲一, 山崎修一郎, 詳解電磁学演習, 共立出版(株) ISBN 4-320-03022-2.
- [5] R. E. Collin, "Foundations for Microwave Engineering", McGraw-Hill, Inc. (1992) ISBN 0-07-011811-6.
- [6] C. R. Paul, "Analysis of Multiconductor Transmission Lines", John Wiley & Sons, Inc. (1994) ISBN 0-471-02080-X.