CHALLENGE TO ANTENNA-MODE THEORY OF MULTICONDUCTOR TRANSMISSION-LINE

Kenji Sato[1,A,B,C)], Hiroshi Toki[2,C)]
A) National Institute of Radiological Sciences (NIRS)
4-9-1 Anagawa , Inage-ku, Chiba-shi, Chiba ,263-8555, Japan
B) High Energy Accelerator Laboratory (KEK)
1-1 Oho, Tsukuba-shi, Ibaraki, 305-0801, Japan
C) Research Center for Nuclear Physics (RCNP), Osaka University
10-1 Mihogaoka, Ibaraki-shi, Osaka, 567-0047, Japan

Abstract

A new multiconductor transmission-line theory[1] is extended to provide the radiation process through the antenna mode in addition to the coupling of the normal and common modes. The antenna mode theory is based on the nonzero total charge and current in the multiconductor transmission-line system, where the transmission-line system loses electric power owing to the electromagnetic radiation through the effect of retarded potential for the electromagnetic field.

多導体伝送線路のアンテナモード理論への挑戦

１．はじめに

配線やケーブルさらにはアース電流が流れる大地を一種の配線と見做す、多導体伝送線路の新しい回路理論[1]（本稿では、以下、新理論、と略称する）の構築に成功した。その論文は受理され、近く発刊される運びであるが、その概要は昨年の第５回年会で既に報告済みである[2]。多導体伝送線路の新理論では、各導体の磁束を誘導係数と電流の積の重ねあわせで表わす点は従来通りであるが、電位を電位係数と電荷の積の重ね合わせで表わした点が新しい。このとき、新しい知見として、電位係数は誘導係数と同じく、ノイマンの公式で計算出来ることが示された。その結果、電位係数と誘導係数との比の平方根は光速となり、各導体は電磁波を送信し、また、受信するアンテナと見做すことが出来、電気信号はそうした電磁波の送受信により伝播することが明らかにされた。さらに、新しい知見として、各導体の電位係数と誘導係数との積の平方根は、その導体の特性インピーダンスであることが示された。

この新理論により３導体伝送線路回路の解は厳密に求まる。以前、集中定数回路要素を３本線で繋いだ電気回路理論[3]を構築し、ノーマルモードとコモンモードの２種類のモードが存在することを論じた。このとき、集中定数回路要素を繋ぐ配線やケーブルを完全導体と見做していたが、新理論では、それとは違って、配線やケーブルの間で誘導起電力を引き起こすファラデーの電磁誘導のような動的な現象を通して、ノーマルモードとコモンモードとを結合させる。この結合こそが、ノイズが、理解し難い複雑な振る舞いを示す原因であることを明らかに出来た。

ところで、我々の経験では、ノイズが発生すると、必ず、電磁波が輻射されていることを知っている。従来のアンテナ理論によれば、ノンゼロの高周波電流が流れている線状アンテナが原点にあれば、電磁波が輻射されるので、多導体伝送線路においてもノンゼロの電流が発生していることになる。多導体伝送線路では電磁波の送受信により電気信号が伝播しているため、全ての導体を流れる電流の総和がノンゼロになる機構があれば電磁波が輻射されることになり、それをアンテナモードと呼ぶことにする。このとき、電磁波が輻射されると、電位（あるいは電圧）と電流の積から計算される電気回路のエネルギーは電気信号が伝播するに連れて減少するので、電磁波の輻射現象は、まるで抵抗のような、一種の負荷として取り扱うことが出来ると考えられる。

ところで、従来のアンテナ理論から知られているように、電場と磁場の遠方解である電磁波の輻射は、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルと言う電磁ポテンシャルの遅延ポテンシャルから計算される。これに対して、新理論そのものは、遅延のないスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルに基づいて構築されている。このため、電磁波の輻射が起こる多導体伝送線路を取り扱うためには、新理論を拡張して、遅延ポテンシャルの効果を取り入れる必要がある。この報告では、導体に抵抗があるときには電流の総和がノンゼロになり、遅延ポテンシャルをテーラー級数展開し、その第２項までを取り入れた近似とすれば良いことを、２導体平行伝送線路と中心入力式の線状アンテナの場合を例として論じる。

1 E-mail: sato@rcnp.osaka-u.ac.jp
2 E-mail: toki@rcnp.osaka-u.ac.jp

２．遅延ポテンシャル

2.1 ローレンス条件と遅延ポテンシャル

原点近く、z 軸と平行に、多導体伝送線路が存在し、時間的に変化する、真電荷体積密度を $\rho(\boldsymbol{r},t)$ とし、伝導電流面積密度を $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)$ とする。このとき、スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ は、ローレンス条件

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+div\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0 \qquad (2.1.1)$$

を満たすとき、$\rho(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)$ の遅延量で、

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}dV' \qquad (2.1.2)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}dV' \qquad (2.1.3)$$

で与えられ、遅延ポテンシャルと呼ばれる。

電場と磁場はこれらの電磁ポテンシャルを用いて、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-grad\,\phi(\boldsymbol{r},t)-\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \qquad (2.1.4)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=rot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \qquad (2.1.5)$$

と与えられる。

ところで、これらの電磁ポテンシャルは、多導体伝送線路の回路理論と電磁波の輻射理論の両者に適用出来る訳であるが、そのとき、左辺と右辺の被積分関数に現われる位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の意味するところが異なる。多導体伝送線路の回路理論では $\boldsymbol{r}$ は伝送線路自体の位置ベクトルを表わすが、輻射される電磁波の電場と磁場の遠方解に対しては、$\boldsymbol{r}$ は、電荷や電流が存在しない、遠方の位置ベクトルを表わす。

なお、右辺の被積分関数に現われる位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ は、多導体伝送線路の場合であれ、輻射される電磁波の電場と磁場の場合であれ、電荷や電流が存在する伝送線路の位置ベクトルを表わす。

2.2 電荷と電流の分布

伝導電流面積密度は原点近くで z 軸と平行に流れているとし、z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とすると、

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t)=i(\boldsymbol{r}',t)\boldsymbol{e}_z \qquad (2.2.1)$$

と表わされる。さらに、N 個の導体からなる多導体伝送線路の z 座標を z' と表わすと、

$$\boldsymbol{r}'=z'\boldsymbol{e}_z \qquad (2.2.2)$$

が成立し、その断面での電荷と電流の総和を

$$Q_T(z',t)=\sum_{i=1}^{N}Q_i(z',t) \qquad (2.2.3)$$

$$I_T(z',t)=\sum_{i=1}^{N}I_i(z',t) \qquad (2.2.4)$$

と表わすことにする。

2.3 電磁波の輻射に対するベクトルポテンシャル

遠方での電場や磁場を球座標 (r,θ,φ) で表わし、各方向の単位ベクトルを $(\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi)$ とすれば、

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \qquad (2.3.1)$$

と表わされる。遠方解に対しては、

$$r>>z' \qquad (2.3.2)$$

が成立するので、近似的に

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=|r\boldsymbol{e}_r-z'\boldsymbol{e}_z|\approx r-z'\cos\theta \qquad (2.3.3)$$

が得られる。これらの近似式を(2.1.3)のベクトルポテンシャルの式に代入すると、

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,t)=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0}{4\pi r}\int I_T\left(z',t-\frac{r}{c}+\frac{z'}{c}\cos\theta\right)dz' \qquad (2.3.4)$$

を得る。なお、方位角 φ には依存しないので、省略してある。

この式を（2.1.1）に代入してスカラーポテンシャルを求め、（2.1.4）と（2.1.5）を計算すると、遠方での電場は球座標の天頂角方向の θ 成分のみとなり、それも距離に反比例しており、

$$E_\theta(r,\theta,t)=-\frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\int I_T\left(z',t-\frac{r}{c}+\frac{z'}{c}\cos\theta\right)dz' \qquad (2.3.5)$$

と求まる。このとき、磁場の遠方解は方位角方向の φ 成分のみとなり、電場により表わされる。

$$\frac{1}{\mu_0}B_\varphi(r,\theta,t)=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}E_\theta(r,\theta,t) \qquad (2.3.6)$$

この電場と磁場に対するポインティングベクトルは動径方向の r 成分のみとなり

$$S_r=E_\theta(r,\theta,t)\frac{1}{\mu_0}B_\varphi(r,\theta,t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\{E_\theta(r,\theta,t)\}^2 \qquad (2.3.7)$$

となる。さらに、ポインティングベクトルを遠方での球の表面積で面積積分すると、輻射される電磁波のエネルギーが求まる。

$$T_{radiation}=2\pi r^2\int_0^\pi S_r(r,\theta,t)\sin\theta d\theta \qquad (2.3.8)$$

ここで、電流の時間変化を単一周波数の単振動として

$$I_T(z',t)=I_T(z')e^{j\omega t} \qquad (2.3.9)$$

と表わすと、電流の遅延量は

$$I_T\left(z',t-\frac{r}{c}+\frac{z'}{c}\cos\theta\right)=I_T(z')e^{j\omega t}e^{-jk_Sr}e^{jk_Sz'\cos\theta} \qquad (2.3.10)$$

と表わされる。ただし、波数 k_S は真空中を光速で伝播する電磁波の波数で

$$k_S = \frac{\omega}{c} \quad (2.3.11)$$

と定義される。このとき、電場の遠方解は

$$E_\theta(r,\theta,t) = -j\omega\frac{\mu_0}{4\pi}e^{j\omega t}\frac{e^{-jk_S r}}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int dz' e^{jk_S z'\cos\theta} I_T(z') \quad (2.3.12)$$

で与えられ、動径依存性からして、球面波であることが分かる。即ち、遅延ポテンシャルで電場や磁場を計算したからこそ、電磁波が球面波として顔を出す仕掛けになっていることが分かる。

この電場は複素数で与えられているが、ポインティングベクトルを実数で与えることにして、

$$S_r(r,\theta,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\omega^2\frac{\mu_0^{\,2}}{16\pi^2 r^2}\sin^2\theta\left|\int dz' e^{jk_S z'\cos\theta} I_T(z')\right|^2 \quad (2.3.13)$$

を計算すれば良い。

輻射される電磁波のエネルギーを計算するには、変数変換をしておくのが便利であり、

$$\xi = \cos\theta \quad (2.3.14)$$

とする。また、(2.3.13)の右辺の絶対値の関数を

$$F(\xi) = \int dz' e^{jk_S z'\xi} I_T(z') \quad (2.3.15)$$

と置くと、電磁波の輻射エネルギーを計算するのに便利である。このとき、輻射エネルギーは

$$T_{radiation} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\omega^2\frac{\mu_0^{\,2}}{8\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)\left|F(\xi)\right|^2 d\xi \quad (2.3.16)$$

で与えられる。

2.4 電気回路における遅延ポテンシャルの近似

電気回路においては、(2.1.2)や(2.1.3)の左辺や右辺の被積分関数に現われる位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ も、右辺の被積分関数に現われる位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ も、電荷や電流が存在する伝送線路の位置を表わすので、

$$\frac{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}{c} << 1 \quad (2.4.1)$$

が成立する。そこで電荷や電流の遅延量をテーラー級数展開して、第２項までで近似する。その結果、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho(\boldsymbol{r}',t)dV' \quad (2.4.2)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}dV' + \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t)dV' \quad (2.4.3)$$

のように近似することが出来る。いずれの式でも、右辺の第２項は、(2.2.3)と(2.2.4)で定義した、電荷あるいは電流の総和を表わしている。

また、これらの式の右辺の第１項は、新理論の基になっている式であり、（2.4.2）や（2.4.3）の右辺の第2項を含めて、i 番目の導体の位置 z 及び時刻 t での電位と磁束は

$$V_i(z,t) = \sum_{j=1}^{N}P_{ij}Q_j(z,t) + M_{Ae}\frac{\partial Q_T(z,t)}{\partial t} \quad (2.4.4)$$

$$\Phi_i(z,t) = \sum_{j=1}^{N}L_{ij}I_j(z,t) + M_{Am}\frac{\partial I_T(z,t)}{\partial t} \quad (2.4.5)$$

と表わすことが出来る。これらの式の P_{ij} と L_{ij} はそれぞれ電位係数と誘導係数であり、新理論[1]で詳述されているように、いずれもノイマンの公式により計算出来、両者の比の平方根は光速となる。なお、係数 M_{Ae} と M_{Am} をそれぞれアンテナモード電荷係数及びアンテナモード電流係数と呼ぶことにするが、電位係数と誘導係数との関係と同じく

$$\sqrt{\frac{M_{Ae}}{M_{Am}}} = c \quad (2.4.6)$$

が成立するものとする。また、アンテナモードインピーダンス係数を、

$$M_A = \sqrt{M_{Ae}M_{Am}} = \frac{M_{Ae}}{c} = cM_{Am} \quad (2.4.7)$$

と定義する。これらの係数は、遅延ポテンシャルのテーラー級数展開の第２項までで近似したため、正確に求めることが出来ないものとして取り扱い、後ほど、実践的アンテナモード計算モデルと呼ぶ、電磁波の輻射エネルギーと電気回路エネルギーとを比較して定める手順で計算する。

ここで i 番目の導体に対して、導体に抵抗 R_i があるとしたとき、キルヒホッフの法則を適用すると

$$\frac{\partial I_i(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial Q_i(z,t)}{\partial t} \quad (2.4.8)$$

$$\frac{\partial V_i(z,t)}{\partial z} + R_i I_i(z,t) = -\frac{\partial \Phi_i(z,t)}{\partial t} \quad (2.4.9)$$

が得られる。

ところで、(2.4.8)の両辺を導体の個数だけの和を取ると、

$$\frac{\partial I_T(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial Q_T(z,t)}{\partial t} \quad (2.4.10)$$

が得られ、(2.4.4)の右辺の第２項は電流の総和の z による偏微分となるので、以下の(2.4.11)や(2.4.12)のように電荷の総和が現われない式が得られる。

これらの式に、電気と磁気に関する重ね合わせの原理の式の(2.4.4)と(2.4.5)を代入して

$$\frac{\partial V_i(z,t)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{N}P_{ij}\frac{\partial I_j(z,t)}{\partial z} - M_{Ae}\frac{\partial^2 I_T(z,t)}{\partial t\partial z} \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\partial V_i(z,t)}{\partial z}+R_i I_i(z,t)=-\sum_{j=1}^{N}L_{ij}\frac{\partial I_j(z,t)}{\partial t}-M_{Am}\frac{\partial^2 I_T(z,t)}{\partial t^2} \qquad (2.4.12)$$

が得られる。

多導体伝送線路の電気回路エネルギーは、複素数で表わしたとき、電位と電流により

$$W(z)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4}\{V_i(z)I_i(z)^* + V_i(z)^* I_i(z)\} \qquad (2.4.13)$$

と与えられる。

また、N 個の導体全てのジュール熱は

$$P_{Joule}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}R_i\int dz'|I_i(z')|^2 \qquad (2.4.14)$$

と与えられる。

３．２導体平行伝送線路のアンテナモード

3.1 太さが異なり抵抗が異なる２導体平行伝送線路

長さが l の太さが異なり抵抗が異なる、孤立した２導体平行伝送線路を考え、大地の影響を無視する。

これまで電流の総和を $I_T(z,t)$ と定義して来たが、アンテナモード電流と言うことで $I_A(z,t)$ と書くことにする。このとき、アンテナモード電流が

$I_A(z,t)\neq 0$ (3.1.1)

のようにノンゼロになる機構があれば、電磁波の輻射が起こることになる。しかし、左端に電源を繋ぎ、右端に負荷を繋ぐと、これらの集中定数回路要素の繋ぎ目では、

$I_A(z=0,t)=I_A(z=l,t)=0$ (3.1.2)

が成立するので、アンテナモードの電流がノンゼロになるとしても、線路の途中でノンゼロになる機構が必要である。

3.2 ノーマルモード、アンテナモード、及び、各種インピーダンス

２導体伝送線路に対して(2.4.11)と(2.4.12)を適用したときの諸式の掲載を省略する。ここでは、ノーマルモードの電圧と電流を

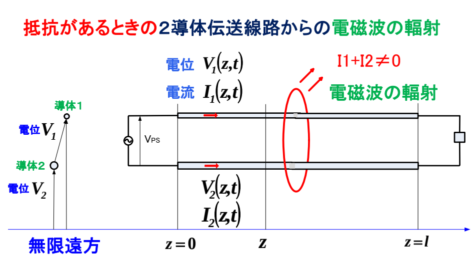

図1　孤立した２導体伝送線路

$V_n(z,t)=V_1(z,t)-V_2(z,t)$ (3.2.1)

$I_n(z,t)=\frac{1}{2}\{I_1(z,t)-I_2(z,t)\}$ (3.2.2)

と定義し、アンテナモードの電圧と電流を

$V_A(z,t)=\frac{1}{2}\{V_1(z,t)+V_2(z,t)\}$ (3.2.3)

$I_A(z,t)=I_1(z,t)+I_2(z,t)$ (3.2.4)

と定義する。これらに対する偏微分方程式を表わすのに便利なように、各種インピーダンスを定義する。

$$Z_n=\frac{P_{11}+P_{22}-2P_{21}}{c}=c(L_{11}+L_{22}-2L_{21}) \qquad (3.2.5)$$

$$Z_{nA}=\frac{P_{11}-P_{22}}{c}=c(L_{11}-L_{22}) \qquad (3.2.6)$$

$$Z_A=\frac{P_{11}+P_{22}+2P_{21}}{c}=c(L_{11}+L_{22}+2L_{21}) \qquad (3.2.7)$$

$$R=\frac{1}{2}(R_1+R_2) \qquad (3.2.8)$$

$$r=R_1-R_2 \qquad (3.2.9)$$

$$M_A=\frac{M_{Ae}}{c}=cM_{Am} \qquad (3.2.10)$$

(2.4.11)と(2.4.12)の式を、各種インピーダンスを用いて、ノーマルモードとアンテナモードの電圧と電流の式に書き直すと、４つの連立偏微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V_n(z,t)}{\partial t}=-Z_n\frac{\partial I_n(z,t)}{\partial z}-\frac{1}{2}Z_{nA}\frac{\partial I_A(z,t)}{\partial z} \qquad (3.2.11)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V_A(z,t)}{\partial t}$$
$$=-\frac{1}{2}Z_{nA}\frac{\partial I_n(z,t)}{\partial z}-\frac{1}{4}Z_A\frac{\partial I_A(z,t)}{\partial z}-M_A\frac{\partial^2 I_A(z,t)}{\partial t\partial z} \qquad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial V_n(z,t)}{\partial z}+2RI_n(z,t)+\frac{1}{2}rI_A(z,t)$$
$$=-\frac{Z_n}{c}\frac{\partial I_n(z,t)}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{Z_{nA}}{c}\frac{\partial I_A(z,t)}{\partial t} \qquad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial V_A(z,t)}{\partial z}+\frac{1}{2}rI_n(z,t)+\frac{1}{2}RI_A(z,t)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{Z_{nA}}{c}\frac{\partial I_n(z,t)}{\partial t}-\frac{1}{4}\frac{Z_A}{c}\frac{\partial I_A(z,t)}{\partial t}-\frac{M_A}{c}\frac{\partial^2 I_A(z,t)}{\partial t^2} \qquad (3.2.14)$$

3.3 単一周波数の時間的振動と２つの異なる波数

電位あるいは電圧、及び、電流の全ての時間的変化を単一周波数 ω の単振動とし、$e^{j\omega t}$ とする。さらに、波数に対する変化を e^{-jkz} とし、与えられた ω に対する波数 k を求めることにする。例えば、$V_n(z,t)$ に対しては

$$V_n(z,t)=V_n(z)e^{j\omega t}e^{-jkz} \qquad (3.3.1)$$

と表すことにする。

電位あるいは電圧、及び、電流がゼロにならないためには、波数の平方 k^2 は、次の２次方程式の解

$$k^4\left\{Z_n\left(\frac{1}{4}Z_A + j\omega M_A\right) - \frac{1}{4}Z_{nA}{}^2\right\} - k^2\frac{\omega}{c}\left\{\begin{aligned}&2\frac{\omega}{c}Z_n\left(\frac{1}{4}Z_A + j\omega M_A\right)-\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}Z_{nA}{}^2\\ &-2jR\left(\frac{1}{4}Z_n+\frac{1}{4}Z_A + j\omega M_A\right)+\frac{1}{2}jrZ_{nA}\end{aligned}\right\} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left[\begin{aligned}&\left(\frac{\omega}{c}Z_n - 2jR\right)\left\{\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{4}Z_A+j\omega M_A\right)-\frac{1}{2}jR\right\}\\ &-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{c}Z_{nA}-jr\right)^2\end{aligned}\right] = 0$$

となる。

(3.3.2)

この k^2 の２次方程式の解を、$\pm(k_1 - j\delta_1)$、及び、$\pm(k_2 - j\delta_2)$ とすると、例えば、、アンテナモードは

$$I_A(z) = I_{A1+}e^{-j(k_1-j\delta_1)z} + I_{A1-}e^{j(k_1-j\delta_1)z} + I_{A2+}e^{-j(k_2-j\delta_2)z} + I_{A2-}e^{j(k_2-j\delta_2)z} \quad (3.3.3)$$

と与えられる。なお、振幅の右足の添え字の＋記号は z 軸の正方向に進行する波動を表わし、－記号は z 軸の負方向に進行する波動を表わしている。

3.4 左端に電源、右端に負荷を接続

$z=0$ の左端に電源を接続し、$z=l$ の右端に負荷を接続すると、(3.1.2)のようにアンテナモードの電流はゼロになる。$z=0$ では(3.3.3)より

$$I_A(z=0) = I_{A1+} + I_{A1-} + I_{A2+} + I_{A2-} = 0 \quad (3.4.1)$$

が成立し、$z=l$ では(3.3.3)より

$$I_A(z=l) = 0 = I_{A1+}e^{-j(k_1-j\delta_1)l} + I_{A1-}e^{j(k_1-j\delta_1)l} + I_{A2+}e^{-j(k_2-j\delta_2)l} + I_{A2-}e^{j(k_2-j\delta_2)l} \quad (3.4.2)$$

が成立する。

これらの式から、アンテナモードの電流は、左端と右端でゼロになるものの、$0<z<l$ の途中ではノンゼロになる。従って、電磁波が輻射されることが分かる。

3.5 特異現象として先駆信号の発生

伝播速度が異なり減衰が異なる２種類の波動が発生することが分かった。波数の実数部が小さい波動、即ち、伝播速度が速い波動は減衰が大きく、逆に、波数の実数部が大きい波動、即ち、伝播速度が遅い波動は減衰が小さい。電磁波を輻射するような状態、従って、２導体伝送線路の場合には、太さが異なり抵抗が異なる場合であるが、左端の電源から発せられた電気信号は、右端の負荷には異なる時間で異なる振幅で到達することになる。即ち、主信号が到達する前に先駆信号が到達し、これを特異現象と呼ぶことにするが、従来の伝送線路理論では考えることが出来なかった現象である。

3.6 太さが同じで抵抗が同じ２導体平行伝送線路

太さも抵抗も同じ２導体平行伝送線路の場合

$Z_{nA}=0$、$r=0$ (3.6.1)

が成立する。この条件を、(3.2.11)、(3.2.12)、(3.2.13)、及び、(3.2.14)に代入すると、ノーマルモードとアンテナモードは結合することなく、それぞれのモードが独立した偏微分方程式が得られる。

このとき、アンテナモードの複素数の波数の平方 $k_A{}^2$ は１つであるから、(3.1.2)のように両端でゼロになるときには、アンテナモード電流は z によらず常にゼロになる。従って、電磁波の輻射が起こることがない。

３導体伝送線路に対する新理論では、２本の主配線が対称であることを要求したが、２導体伝送線路のアンテナモードでも同様の結果が得られる。

４．抵抗がないときの中心入力式の線状アンテナ

4.1 中心入力式の線状アンテナは２導体系

長さが $2l$ の線状アンテナの中央に電源を繋ぐとき、線状アンテナは１導体系ではなく、２導体系であるとして取り扱うのが良い。上半分を１番目の導体とし、下半分を２番目の導体とする。簡単のため、ここでは、２つの導体の太さも抵抗も同じであるとし、1番目と２番目の導体の電圧は符号が逆転していて反対称であり、電流は符号が同じで対称であるとする。

$V_2(-z) = -V_1(z)$ (4.1.1)

$I_2(-z) = I_1(z)$ (4.1.2)

このことから、上半分の１番目の導体に関する２つの式だけを解けば良いことになる。

$$\frac{\partial V_1(z,t)}{\partial t} = -P_{11}\frac{\partial I_1(z,t)}{\partial z} - M_{Ae}\frac{\partial^2 I_1(z,t)}{\partial t\partial z} \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial V_1(z,t)}{\partial z} = -L_{11}\frac{\partial I_1(z,t)}{\partial t} - R_1 I_1(z,t) - M_{Am}\frac{\partial^2 I_1(z,t)}{\partial t^2} \quad (4.1.4)$$

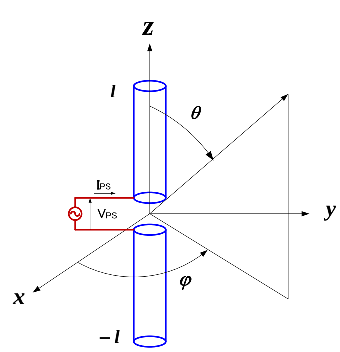

図２
中心入力式の
線状アンテナ

4.2 アンテナモード、及び、各種インピーダンス

(4.1.3)と(4.1.4)に現われた $V_1(z,t)$ と $I_1(z,t)$ は、それぞれ、アンテナモードの電位と電流と考えて良いので、そのままの右足の添え字で話を進める。

さらに各種インピーダンスを

$$Z_{11}=\frac{P_{11}}{c}=cL_{11} \quad (4.2.1)$$

$$M_A=\frac{M_{Ae}}{c}=cM_{Am} \quad (4.2.2)$$

と定義する。ただし、抵抗 R_1 はそのまま使用する。

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V_1(z,t)}{\partial t}=-Z_{11}\frac{\partial I_1(z,t)}{\partial z}-M_A\frac{\partial^2 I_1(z,t)}{\partial t\partial z} \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial V_1(z,t)}{\partial z}=-\frac{Z_{11}}{c}\frac{\partial I_1(z,t)}{\partial t}-R_1I_1(z,t)-\frac{M_A}{c}\frac{\partial^2 I_1(z,t)}{\partial t^2} \quad (4.2.4)$$

これらの連立偏微分方程式の解はそれほど複雑ではないものの、電気回路エネルギーや電磁波の輻射エネルギーまで計算を進めると、それなりに複雑な様相を示す。

そこで、本稿では、従来のアンテナ理論との比較を目的として、これらの式に現われる抵抗をゼロとする。そのときの連立偏微分方程式は

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V_1(z,t)}{\partial t}=-Z_{11}\frac{\partial I_1(z,t)}{\partial z}-M_A\frac{\partial^2 I_1(z,t)}{\partial t\partial z} \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial V_1(z,t)}{\partial z}=-\frac{Z_{11}}{c}\frac{\partial I_1(z,t)}{\partial t}-\frac{M_A}{c}\frac{\partial^2 I_1(z,t)}{\partial t^2} \quad (4.2.6)$$

となる。本稿ではこれらの式の解を求めるが、抵抗がノンゼロの場合の計算の手順も同様である。

4.3 単一周波数の時間的単振動と波数

電位と電流の時間的変化を単一周波数 ω の単振動とし、$e^{j\omega t}$ とする。

$$j\frac{\omega}{c}V_1(z)=-(Z_{11}+j\omega M_A)\frac{\partial I_1(z)}{\partial z} \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial V_1(z)}{\partial z}=-j\frac{\omega}{c}(Z_{11}+j\omega M_A)I_1(z) \quad (4.3.2)$$

ここまで書いて来ると、係数が複素インピーダンス $(Z_{11}+j\omega M_A)$ になっていることと、電圧ではなく遠方での値をゼロと定義した電位であること以外は、従来の２導体伝送線路や同軸ケーブルの理論と同じ形式であることが分かる。そこで、本稿では途中の計算の多くを省略し、結果のみを示すことにする。

波数に対する変化を e^{-jkz} とし、与えられた ω に対する波数 k を求めると、波数は(2. 3. 11)と同じく

$$k=\pm\frac{\omega}{c}=\pm k_S \quad (4.3.3)$$

となる。このとき、電位と電流は

$$V_1(z)=V_{1+}e^{-jk_Sz}+V_{1-}e^{jk_Sz} \quad (4.3.4)$$

$$I_1(z)=I_{1+}e^{-jk_Sz}+I_{1-}e^{jk_Sz} \quad (4.3.5)$$

と表わされる。

4.4 中心入力式で末端は開放

$z=l$ の末端で電流はゼロになるので

$$0=I_1(z=l)=I_{1+}e^{-jk_Sl}+I_{1-}e^{jk_Sl} \quad (4.4.1)$$

が成立する。従って、I_{1-} は $I+$ より

$$I_{1-}=-I_{1+}e^{-2jk_Sl} \quad (4.4.2)$$

と表わされる。

長さが l で太さが同じ２導体の中心である原点に電源を接続するとき、電位のジャンプが起こり、電流は連続する。従って、$z=z'=0$ で

$$V_1(z=0)-V_2(z'=0)=V_{PS} \quad (4.4.3)$$

$$I_1(z=0)=I_2(z'=0)=I_{PS} \quad (4.4.4)$$

が成立する。これらの関係を(4.3.4)と(4.3.5)に代入して

$$\begin{aligned}V_{PS}&=2(V_{1+}+V_{1-})=2(Z_{11}+j\omega M_A)(I_{1+}-I_{1-})\\&=4(Z_{11}+j\omega M_A)I_{1+}e^{-jk_Sl}\cos(k_Sl)\end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$I_{PS}=I_{1+}+I_{1-}=2je^{-jk_Sl}I_{1+}\sin(k_Sl) \quad (4.4.6)$$

が成立する。従って、電源の入力インピーダンスは

$$Z_{PS}=\frac{V_{PS}}{I_{PS}}=2(\omega M_A-jZ_{11})\frac{\cos(k_Sl)}{\sin(k_Sl)} \quad (4.4.7)$$

と求まる。この式から知られるように、アンテナモードインピーダンス係数 M_A は実数部を与え、線路の特性インピーダンス Z_{11} は虚数部を与える。

また、(4.4.2)を(4.3.4)と(4.3.5)に代入して

$$V_1(z)=(Z_{11}+j\omega M_A)I_{1+}\left(e^{-jk_Sz}+e^{-2jk_Sl}e^{jk_Sz}\right) \quad (4.4.8)$$

$$I_1(z)=\left(e^{-jk_Sz}-e^{-2jk_Sl}e^{jk_Sz}\right)I_{1+} \quad (4.4.9)$$

と求まる。

4.5 電気回路エネルギー

(2.4.13)の電気回路エネルギーは、$z=l$ の右端ではゼロになる。

$$W_{circuit}(z=l)=0 \quad (4.5.1)$$

また、原点での電気回路エネルギーは

$$W(z=0)=\frac{1}{2}|I_{1+}|^2\omega M_A\sin(2k_Sl) \quad (4.5.2)$$

で与えられる。期待通り、アンテナモードインピーダンス係数 M_A で電気回路エネルギーが与えられ、電磁波の輻射は電気回路の一種の負荷となっていることが分かる。

4.6 電磁波の輻射エネルギー

(2.3.15)の $F(\xi)$ を本章の記法に合わせて書くと

$$F(\xi)=\int_{-l}^{0}dz'e^{jk_Sz'\xi}I_2(z')+\int_0^l dze^{jk_Sz\xi}I_1(z) \quad (4.6.1)$$

となる。線状アンテナでは(4.1.2)が成立するので、それを代入すると

$$F(\xi)=\int_l^0 d(-z)e^{-jk_s z\xi}I_2(-z)+\int_0^l dze^{jk_s z\xi}I_1(z)$$
$$=\int_0^l dze^{-jk_s z\xi}I_1(z)+\int_0^l dze^{jk_s z\xi}I_1(z)$$
$$=\int_0^l dz\left(e^{-jk_s z\xi}+e^{jk_s z\xi}\right)I_1(z)$$
$$=I_{1+}\int_0^l dz\left(e^{-jk_s z\xi}+e^{jk_s z\xi}\right)\left(e^{-jk_s z'}-e^{-2jk_s l}e^{jk_s z'}\right) \tag{4.6.2}$$

となる。この式に(4.4.9)を代入し、記法を元に戻して計算すれば良く、 分子については整理したのち、この積分を実行する。

$$F(\xi)$$
$$=2j\frac{e^{-jk_s l}}{k_s}I_{1+}\{cos(k_s l\xi)-cos(k_s l)\}\left(\frac{1}{1+\xi}+\frac{1}{1-\xi}\right) \tag{4.6.3}$$

さらに、(2.3.16)の被積分関数は

$$\left(1-\xi^2\right)|F(\xi)|^2=4\frac{1}{{k_s}^2}|I_{1+}|^2$$
$$\times\frac{1}{2}\left\{cos(2k_s l\xi)-4cos(k_s l)cos(k_s l\xi)+2cos^2(k_s l)+1\right\}$$
$$\times 2\left(\frac{1}{1+\xi}+\frac{1}{1-\xi}\right) \tag{4.6.4}$$

となる。

この被積分関数を $-1\le\xi\le1$ の範囲で積分すれば良いが、$\xi=\pm1$ では分母も分子もゼロになる。そこで、積分範囲を $-1+\varepsilon\le\xi\le1-\varepsilon$ としておき、積分した結果において $\varepsilon\to0$ の極限を求めることにする。

その結果、電磁波の輻射エネルギーは

$$T_{radiation}$$
$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}|I_{1+}|^2$$
$$\times\left[\begin{array}{l}cos(2k_s l)ci(4k_s l)+sin(2k_s l)si(4k_s l)\\ -2\{cos(2k_s l)+1\}ci(2k_s l)+sin(2k_s l)\left\{si(2k_s l)-\frac{\pi}{2}\right\}\\ +\{cos(2k_s l)+1\}\{C+ln(2k_s l)\}\end{array}\right] \tag{4.6.5}$$

と求まる。ただし、C はオイラー定数である。

4.7 実践的アンテナモード計算モデル

抵抗はゼロとしたので、ジュール熱は発生しない。従って、(4.5.2)の原点での電気回路エネルギーは(4.6.5)の電磁波の輻射エネルギーと一致する。

$$W(z=0)=T_{radiation} \tag{4.7.1}$$

これより、アンテナモードインピーダンス係数 M_A が定まるので、(4.4.7)に代入して入力インピーダンスが求まる。

$$Z_{PS}=-2jZ_{11}\frac{cos(k_s l)}{sin(k_s l)}$$
$$+\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{1-cos(2k_s l)}$$
$$\times\left[\begin{array}{l}cos(2k_s l)ci(4k_s l)+sin(2k_s l)si(4k_s l)\\ -2\{cos(2k_s l)+1\}ci(2k_s l)+sin(2k_s l)\left\{si(2k_s l)-\frac{\pi}{2}\right\}\\ +\{cos(2k_s l)+1\}\{C+ln(2k_s l)\}\end{array}\right] \tag{4.7.2}$$

虚数部は線路の特性インピーダンス Z_{11} に比例しており、実数部は(4.5.2)より知られるように、アンテナモードインピーダンス係数 M_A に比例している。こうした計算が出来るのも、多導体伝送線路回路の新理論[1]のなせる業と言えよう。

6. まとめ

多導体伝送線路回路の新理論は非常に強力で、ノーマルモードとコモンモードのノイズの発生機構を明らかに出来るだけでなく、多導体伝送線路から電磁波が輻射されるアンテナモードの発生機構を明らかに出来る。

また、中心入力式の線状アンテナにも適用出来、入力インピーダンスを求めることも出来る。本稿では抵抗がない場合を取り扱ったが、今後は、抵抗があるときの入力インピーダンスを計算し、電源の内部抵抗とのインピーダンス整合を議論することも出来よう。

また、孤立した２導体伝送線路で抵抗がある場合のアンテナモードの計算を進めると同時に、３導体伝送線路においては、ノーマルモードとコモンモード、及び、アンテナモードとの関係を明らかにする必要がある。いずれの場合も、ノイズや電磁波の輻射を低減するためには、多導体伝送線路の配置の対称性を高める必要があることは明らかであろう。

参考文献

[1] H. Toki and K. Sato, “Three Conductor Transmission Line Theory and Origin of Electromagnetic Radiation and Noise”, to be published in JPSJ, Vol..78, No.9 (2009)

[2] K. Sato and H. Toki, “NOISE GENERATION MECHANISM: COUPLING OF NORMAL AND COMMON MODES IN 3 CONDUCTOR TRANSMISSION LINE THEORY”, Proceedings of the 5th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan and the 33rd Linear Accelerator Meeting in Japan (August 6-8, 2008)154-158.

[3] K. Sato and H. Toki, “Synchrotron magnet power supply network with normal and common modes including noise filtering”, NIM in Phys. Res., A565 (2006) 351-357.