

# RIGOROUS EVALUATION OF THE EDGE-FOCUSING WIGGLER BASED ON THE MAGNETIC FIELD MEASUREMENT USING HALL PROBES

S. Kashiwagi<sup>1,A)</sup>, K. Furuhashi<sup>A)</sup>, R. Kato<sup>A)</sup>, G. Isoyama<sup>A)</sup>, K. Tsuchiya<sup>B)</sup>, T. Shioya<sup>B)</sup>, and S. Yamamoto<sup>B)</sup>

<sup>A)</sup> Institute of Scientific and Industrial Research, Osaka University, 8-1 Nihogaoka, Ibaraki, Osaka, Japan, 567-0047

<sup>B)</sup> High Energy Accelerator Research Organization (KEK), 1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki, Japan, 305-0801

## Abstract

The edge-focusing (EF) wiggler, which produces the strong field gradient for transverse focusing incorporated with the normal wiggler field, has been fabricated to evaluate its performance rigorously with the magnetic field measurement. It is a five-period planar wiggler with an edge angle of 2° and a period length of 60 mm. The magnetic field in the wiggler is measured using Hall probes at four different wiggler gaps. It is experimentally confirmed that a high field gradient of 1.0 T/m is realized, as designed, along the beam axis in the EF wiggler. The magnetic field gradient of the EF wiggler is derived as a function of the magnetic gap. The field gradient decreases with increasing magnet gap more slowly than the peak magnetic field does, which is favourable in view of the beam focusing in the wiggler.

## ホール素子を用いたエッジ集束ウイグラーの高精度磁場評価

### 1. はじめに

我々は、阪大産研Lバンド電子ライナックを用いた遠赤外領域の自由電子レーザーの高輝度化を目的としたエッジ集束型ウイグラー(EFウイグラー)の開発を行っている。EFウイグラーは、1990年台はじめ頃に通常の光共振器を用いたFELにおいて、ウイグラー内でビームサイズを小さくしゲインを高めるために提案された幾つかのビーム集束アイデアのうちの1つである。当時、このアイデアに基づき、磁場勾配をウイグラー磁場と同時に作り出すことができるEFウイグラーの製作がなされたが、その定量的かつ十分な評価はなされなかった。その後、EFウイグラーの開発は殆ど行われなくなってしまった。近年、SASEの開発が世界各国で盛んに行われるようになり、SASEに用いるための厳しい精度要求を満足するウイグラーとして、我々はEFウイグラーに再び脚光をあて、数値計算でその性能を解析し、試作機と阪大産研におけるSASE-FEL実験用の強集束型EFウイグラーを製作した。

我々は、これまでの開発からホール素子の僅かな傾きやホール素子を移動させるリニアステージ軸の傾きが、測定される磁場および測定磁場から導出される磁場勾配に大きな影響を与えることを明らかにした。また、エッジ集束ウイグラー内に作られる磁場勾配のギャップ依存性についても考察を行った。本学会ではこれらのEFウイグラーの高精度磁場評価について、EFウイグラー試作機( $\lambda_w=60\text{mm}$ , 5periods)の磁場測定結果をもとに発表を行う。

### 2. エッジ集束ウイグラー

エッジ集束ウイグラーは、通常の直方体磁石にエッジ角度をつける事によりウイグラー内にビーム集束の為の磁場勾配を作り出す事ができる。その水平方向と垂直方向の集束力の和は自然集束力となり( $k_0 = k_x + k_y$ )、水平方向振動のウイグラーの場合、 $k_0 < k_x$ では垂直方向に発散力が働く。また、EFウイグラーの磁場分布は、マクスウェル方程式を満足するように、式(1)でモデル化することができる。

$$\begin{aligned} B_x^{\text{model}} &= Gy \\ B_y^{\text{model}} &= B_0 \cosh(ky) \cos(kz) + Gx \\ B_z^{\text{model}} &= -B_0 \sinh(ky) \sin(kz) \end{aligned} \quad (1)$$

$B_0$ は理想的なプラナーウイグラーのピーク磁場、 $k$ は波数、 $G$ は磁場勾配である。また、磁場勾配は以下のような関係が存在する。

$$\partial B_x / \partial y = \partial B_y / \partial x = G \quad (2)$$

### 3. ホール素子を用いた磁場測定

EFウイグラーの磁場性能を評価するために、ホール素子を使った磁場測定をKEKで行った。図1にKEKの磁場測定システムの概略図を示す。2個のホール素子を使い、垂直( $B_y$ )、水平( $B_x$ )磁場を同時に測定できるようになっている。ホール素子はそれぞれ独立に0.01度の精度で温度制御された銅プレートに固定し、温度変化によって測定磁場がドリフトしないようになっている。ホール素子はNMRに対して磁場校正を行い、 $10^{-5}$ の精度で磁場を測定できる。それぞれのホール素子はアームの先に角度調整

<sup>1</sup> E-mail: shigeruk@sanken.osaka-u.ac.jp

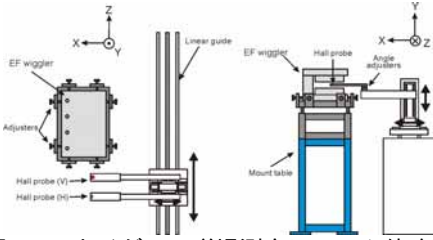


図1：EFウイグラー磁場測定システム外略図

用の2台の小型回転ステージと一緒に取り付けられている。2つのアームは3軸のリニアステージに設置してあり、任意の横方向位置(x, y)でウイグラー軸に沿った水平・垂直磁場を同時に測定することができる。また、水平・垂直磁場勾配は、測定された磁場強度マップデータから、水平軸・垂直軸上のデータをそれぞれ線形フィットし、その係数より求めた。また、EFウイグラーのサポート支柱を4段階に交換し、ギャップ依存性についても測定を行った。

#### 4. ホール素子・リニアステージの設置角度誤差が測定に与える影響

これまでの磁場測定でEFウイグラーの水平・垂直方向磁場をホール素子で測定する時に、ホール素子またはホール素子を取り付けてあるリニアステージの移動軸が僅かに傾いている場合、測定される磁場および磁場勾配に測定誤差が生じるということが分かってきた。我々は、角度エラーが磁場測定に与える影響について明らかにした。

##### 4.1 磁場

まず、ホール素子の角度エラーを図2の様に定義する。ホール素子は、その法線ベクトルnに相当する磁場を測定する。法線ベクトルを軸とする回転には測定磁場は変化しないので、ホール素子の角度エラーは(θ, φ)の2つの角度により定義することができる。そして測定される磁場 $B_x^{mes}$ と $B_y^{mes}$ は(3)式で表

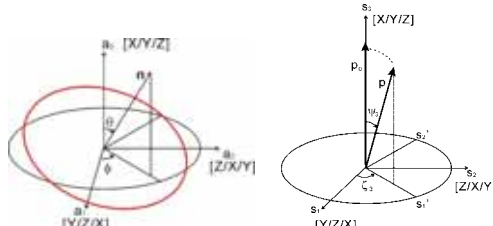


図2: (左)ホール素子の傾きの定義、黒線：エラー無し、赤線：エラー有り、nはホール素子の法線ベクトル。(右)リニアステージの傾きの定義、pがエラー有りのリニアステージ軸。

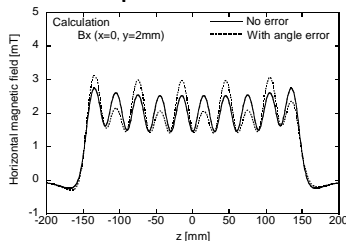


図3：x=0, y=2mm の位置でのウイグラーに沿った水平磁場( $B_x$ )計算値、(実線)エラー無し(点線) 角度エラーあり( $\theta_x = 5.0$  mrad,  $\phi_x = -\pi/2$ )

すことができる。ここで、 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ である。

$$B_x^{mes} = B_y \sin \theta_x \cos \phi_x + B_z \sin \theta_x \sin \phi_x + B_x \cos \theta_x \cong \pm B_z \theta_x + B_x \quad (3-1)$$

$$B_y^{mes} = B_z \sin \theta_y \cos \phi_y + B_x \sin \theta_y \sin \phi_y + B_y \cos \theta_y \cong B_y \quad (3-2)$$

$B_x$ の測定において、最初のホール素子の傾き調整はウイグラー中位面の $B_y$ 最大となる位置で $B_x$ がゼロになるように行う。これは、 $B_y$ の混ざりこみを無くするための $\phi_x = \pm\pi/2$ にする調整に相当する、また $B_y$ 最大の位置では $B_z$ もゼロであるので $\theta_x$ は不確定である。図3にホール素子の角度エラーが $\theta_x = 5.0$  mrad,  $\phi_x = -\pi/2$ の時の水平磁場を示す。角度エラーがある場合は、 $B_z$ が混ざりこんで入るために $\lambda_w/2$ の周期で振動する。式(1), (3-1)、 $B_x$ の $z=0$ に対する対称性よりエラー $\theta_x$ を導出することができる。

一方、 $B_y$ の測定では、最初にウイグラー中位面の $B_y$ 最大の位置( $B_x=0, B_z=0$ )で $B_y$ が最大になるように角度調整する。これは、 $\theta_y$ をゼロにするための調整であり、式(3-2)からも分かるように他の磁場成分の混ざりこみを消す事ができる。

次に3軸のリニアステージ移動軸の角度エラーが磁場測定に与える影響について考える。まず、ステージの角度エラーは図2(右)の様に定義する。角度エラーのあるリニアステージに取り付けてあるリニアスケールの読み値が(a,b,c)の時、実際の位置(x,y,z)は次式(4)の様に書ける。

$$x = a + \delta x_x + \delta x_y + \delta x_z = a \cos \psi_x + b \sin \psi_y \sin \zeta_y + c \sin \psi_z \cos \zeta_z \quad (4)$$

$$y = b + \delta y_x + \delta y_y + \delta y_z = a \sin \psi_x \cos \zeta_x + b \cos \psi_y + c \sin \psi_z \sin \zeta_z$$

$$z = c + \delta z_x + \delta z_y + \delta z_z = a \sin \psi_x \sin \zeta_x + b \sin \psi_y \cos \zeta_y + c \cos \psi_z$$

この時、水平磁場は(5)式となる。(垂直磁場は省略)

$$B_x(x, y, z) \cong B_x^{mes}(a, b, c) + \frac{\partial B_x(a, b, c)}{\partial x} (a \cos \psi_x - 1) + b \sin \psi_y \sin \phi_y + c \sin \psi_z \cos \zeta_z \quad (5)$$

$$+ \frac{\partial B_x(a, b, c)}{\partial y} (a \sin \psi_x \cos \zeta_x + b \cos \psi_y - 1) + c \sin \psi_z \sin \zeta_z$$

$$+ \frac{\partial B_x(a, b, c)}{\partial z} (a \sin \psi_x \sin \zeta_x + b \sin \psi_y \cos \zeta_y + c \cos \psi_z - 1)$$

ウイグラー軸上の磁場は、 $a=b=0$ とし(5)にモデル磁場を代入して整理すると

$$B_x(0, 0, z) \cong B_x^{mes}(0, 0, c) + Gc\psi_z \sin \zeta_z \quad (6-1)$$

$$B_y(0, 0, z) \cong B_y^{mes}(0, 0, c) + Gc\psi_z \cos \zeta_z \quad (6.2)$$

となる。最初にウイグラーを設置する際、ウイグラーのz軸ステージに対するアライメント精度は50 $\mu$ rad以下でなされているので、ステージ軸の傾きエラーはウイグラー軸上の測定磁場には影響しない事が分かる。

##### 4.2 磁場勾配

ホール素子の角度エラーがある場合の磁場勾配は、式(3)から式(7)の様に表せる。4.1で記述したホール素子の角度調整により、エラー角を $\phi_x = \pm\pi/2, \theta_y=0$ に制限でき、式(7)の右辺のように書くことができる。

$$\frac{\partial B_x^{mes}}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial y} \sin \theta_x \cos \phi_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \sin \theta_x \sin \phi_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \cos \theta_x \cong \pm \frac{\partial B_x}{\partial y} \theta_x \sin \phi_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_x^{mes}}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x} \sin \theta_y \cos \phi_y + \frac{\partial B_x}{\partial x} \sin \theta_y \sin \phi_y + \frac{\partial B_x}{\partial x} \cos \theta_y \cong \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

これより垂直磁場勾配へのエラーの影響は無い事が分かる。一方、水平磁場勾配については水平磁場と同様に角度エラー $\theta_x$ が測定結果に影響する。式(7)の水平磁場勾配を $a=b=0$ と式(2)のモデル磁場を使うと

$$\frac{\partial B_x^{mes}(0,0,z)}{\partial y} \cong \mp B_0 k \sin(kz) \theta_x \sin \phi_x + \frac{\partial B_x(0,0,z)}{\partial y} \quad (8)$$

となる。これより、角度エラー $\theta_x$ は測定された水平磁場から導出される磁場勾配から求める事ができる。今回の測定からは、 $\theta_x=0.7\text{mrad}$ という値が導き出された。磁場から求めた $\theta_x$ と一致した。

次に、リニアステージの角度エラーが磁場勾配に与える影響を考える。式(5)から磁場勾配を求め、モデル磁場を代入すると次式(9)になる。

$$\frac{\partial B_x(x,y,z)}{\partial y} \cong \frac{\partial B_x^{mes}(a,b,c)}{\partial b} + \frac{\partial B_x(a,b,c)}{\partial x} \psi_y \sin \zeta_x + \frac{\partial B_x(a,b,c)}{\partial z} \psi_y \cos \zeta_x \quad (9-1)$$

$$\cong \frac{\partial B_x^{mes}(a,b,c)}{\partial b} \quad (9-2)$$

$$\frac{\partial B_y(x,y,z)}{\partial x} \cong \frac{\partial B_y(a,b,c)}{\partial a} + \frac{\partial B_y(a,b,c)}{\partial y} \psi_x \cos \zeta_x + \frac{\partial B_y(a,b,c)}{\partial z} \psi_x \sin \zeta_x \quad (10-1)$$

$$\cong \frac{\partial B_y^{mes}(a,b,c)}{\partial a} - B_0 k \sinh(kb) \cos(kc) \psi_x \cos \zeta_x - B_0 k \cosh(kb) \sin(kc) \psi_x \sin \zeta_x$$

(10-1)より、リニアステージの角度エラーは水平磁場勾配には影響を与えない事が分かる。垂直磁場勾配については、僅かな角度エラーであっても $dBy/dz$ の混ざり込みによる影響は大きい。水平方向の移動リニアステージの $\zeta_x = \pm\pi/2$ に対する角度エラーは、測定された $B_y$ の導関数や次式(10)などから導き出す事ができる。今回の測定での角度エラーは、 $\psi_x = 0.9\text{ mrad}$ と見積もられた。

$$\frac{\partial B_y(0,0,z)}{\partial x} \cong \frac{\partial B_y^{mes}(0,0,c)}{\partial a} \mp B_0 k \sin(kc) \psi_x \quad (10)$$

以上より、角度エラーの測定結果に与える影響について明らかにする事ができた。初期のアライメントで除去する事が困難なエラーについても、ウイグラー軸に沿っての測定結果から角度エラーを見積もり、補正をかける事ができる。

## 5. EFウイグラーのギャップ依存性

ウイグラーのギャップを四段階(30,40,50,60mm)に変化させ、ウイグラー磁場と磁場勾配を測定した。測定では、前述のエラー解析を使い角度エラーの補正を行った。結果を図4に示す。偏向電磁石によるエッジ集束ウイグラーモデルでは、磁場勾配はピーク磁場強度に比例するためギャップ変化に対する傾きは、磁場と勾配とで同じになるはずであるが、図4からギャップを拡げても磁場勾配の変化はピーク磁場変化に比べ小さい事が分かる。ここで、EFウイグラーの磁場勾配のギャップ依存性についてモデルを仮定し考察を行った。図5左にEFウイグラーの磁場勾配を作り出しているエッジ部分に色をつけてみると、2組の長い偏向電磁石が構成されているのが分かる。次に、エッジ角度2度の5周期のEFウイグラーの垂直磁場からプラナーウイグラーの磁場を差し引いて3Dのワイヤープロット図にしたものが図5右である。ビーム軸方向から見ると、水平方向に正弦波的に変化する

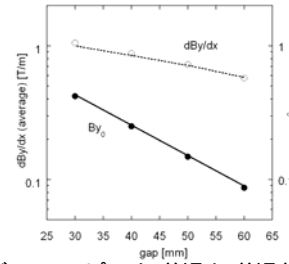


図4：EFウイグラーのピーク磁場と磁場勾配（プロット：測定値、実線・点線：計算値）

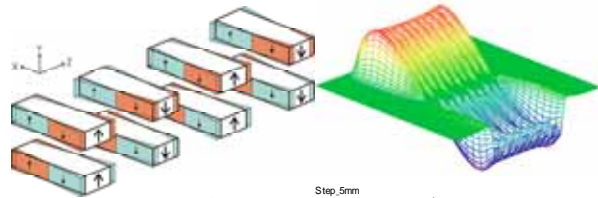


図5：(左)EFウイグラーの磁場勾配モデル、(右)EFウイグラーとプラナーウイグラーの垂直磁場差

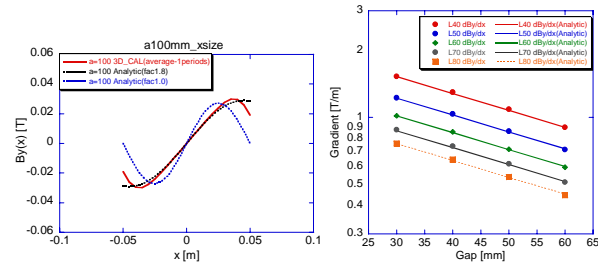


図6：(左)EFウイグラーの垂直磁場横方向分布、(右)異なる周期長での磁場勾配のギャップ依存。各プロットが3D計算、実線が式(12)による計算値

ウイグラー磁場分布と類似している。そこで、水平方向の垂直方向磁場変化をウイグラーのピーク磁場を算出する式を使い、正弦波的に変化する磁場として式(11)を仮定し、式(12)を微分して磁場勾配とした。

$$B_y(x) = 2B_m \exp(-\pi g / \lambda_{trans}) \left( \frac{\sin(\pi / M)}{\pi / M} \right) \{1 - \exp(-2\pi h / \lambda_{trans})\} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{trans}} \cdot x\right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}(x=0) = \frac{4\pi}{\lambda_{trans}} B_m \exp(-\pi g / \lambda_{trans}) \left( \frac{\sin(\pi / M)}{\pi / M} \right) \{1 - \exp(-2\pi h / \lambda_{trans})\} \quad (12)$$

ここで、Mは1周期を構成する片側の磁石数(2個)、 $B_m$ は磁石サイズと磁石の $B_r$ から、 $B_r \cdot a / 4b \cdot \tan\theta$ とした(a: x方向磁石サイズ、b: z方向磁石サイズ、 $\theta$ : エッジ角度)。また、図6左のグラフから $\lambda_{trans}$ は横方向磁石サイズを1.8倍としてスケールした。図6右にウイグラー周期長が異なる場合の磁場勾配のギャップ依存を示す。プロットが3Dの計算から求まる磁場勾配、直線が式(12)によりモデルより導き出された磁場勾配である。これより式(12)はEFウイグラーの磁場勾配を導出する良い近似式である事が分かる。

本研究はKEKの共同開発(2006-18, 2006)、および科学研究経費・若手研究(B) 17740144, 2005-2006のサポートを受け行われた。

## 参考文献

- [1] S. Kashiwagi et al., Proc. of FEL2004, pp.458.
- [2] S. Kashiwagi et al., Proc. of FEL2005, pp.199.