

BEAM-BEAM EFFECT SEEN THROUGH FORCED VIBRATION

Yuji Seimiya^{1,A)}, Kohji Hirata^{A)}

A) The Graduate University for Advanced Studies
Shonan-village, Hayama-city, Miura-gun, Kanagawa, 240-0193

Abstract

In electron accelerator, tune is measured by giving beam transverse forced vibration caused by RF frequency. It is well known that beam-beam parameter can be measured if beam-beam interaction exists [1]. Generally, small value is chosen as the amplitude of forced vibration, and many researches were done in this case. In this report, we discuss effect of resonance caused by beam-beam interaction in case of amplitude of forced vibration being big.

強制振動で見るビームビーム効果

1. 強制振動による共鳴

電子加速器ではビームを横方向にRF周波数で強制振動させることで、チューンの測定が行われている。ビームビーム相互作用が存在する場合には、これによってビームビームパラメタも測定できることはよく知られている[1]。このとき与える強制振動の振幅はある程度小さな振幅を選択するのが普通であり、よく研究されている。本論文では、強制振動の振幅が大きい場合に、ビームビーム相互作用によるレゾナンスの影響を調べる。

線形振動子の強制振動の式といえば、

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t \quad (1)$$

であり、平衡状態における質点の振動は

$$a = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad (2)$$

と書ける。 ω_0 が独立変数の場合、単純な関数となるが、非線形振動の場合には $\omega_0 = \omega_0(a)$ のように基本振動数が質点の振幅に依存する場合はそう簡単ではない。このようなことはビームビーム相互作用が加わった場合にも起こる。例えば強制振動の振幅が小さく、ビームビーム相互作用が存在する場合、強制振動の振動数と質点の振幅との関係は図1のようになる。緑線はチューンを下からスキャンしたもので、橙線は上からスキャンしたものを表している。下からスキャンする場合、基本振動数 ω_0 の近くでしばらくスキャンするとある振動数 ω_2 のとき振幅が急激に増加し、別の安定状態へジャンプする。一方上からスキャンする場合は、基本振動数 ω_0 の近くから徐々に振幅が増加していき、 ω_2 より小さな振動数までスキャンが進むとある振動数 ω_1 で急激に振幅が減少し、別の（下からスキャンしたときの）安定状態へジャンプする。ここからわかるように、 ω_1 から ω_2 の間には2つの安定状態が存在している。つまり、ビームビーム相互作用が存在するとき、強制振動を与えることで共鳴の最大値が ω_0 からずれ、図1のようなヒステリシスが現れる[1, 2]。これは

相互作用の似た性質を持つ8極磁石による力も同様のことが言える。

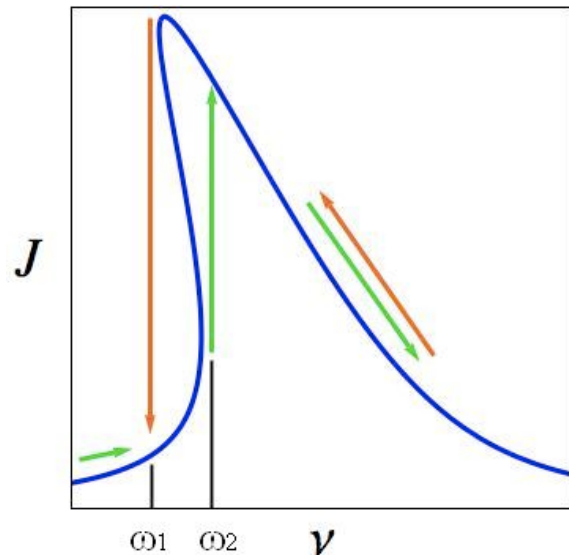


図1. ヒステリシス現象

共鳴状態において、粒子の振幅は著しく大きくなる。そのため、8極磁石を想定するようなシミュレーションの場合、位置の3乗に比例した復元力が働くために共鳴状態のとき発散することが少なくなき扱いが少々難しくなる。以降はビームビーム効果にのみ焦点を絞り議論していく。

2. シミュレーションのモデル

ビームビーム効果を伴った系のチューンスキャンを3次元的にシミュレーションすることは容易ではない。そのため、1次元のモデルを用いて大まかにどのような現象が起こるのかを調べる。ビームビーム効果の場合には両ビームの重心の相対座標（パイモード）に注目するが、これは1粒子と多粒子の衝突、つまりweak-strongビームビーム相互作用で量子

¹ E-mail: seimiya@post.kek.jp

拡散効果の無いものに同等である（ただし、ビームビームキックの大きさは異なる）[1]。粒子の運動を式で書き表すと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = e^{-d} M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 + f(x_0) \end{pmatrix}$$

$$p_2 = p_1 + A \cos 2\pi\nu \quad (3)$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu_0 & \sin 2\pi\nu_0 \\ -\sin 2\pi\nu_0 & \cos 2\pi\nu_0 \end{pmatrix}$$

ここで、 d はダンピングレイト、 ν_0 は基準となる粒子のベータトロンチューン、 ν は強制振動の振動数、 A は強制振動の振幅、関数 f はhorizontal方向のビームサイズがvertical方向のビームサイズより十分小さいときのビームビーム効果によって受ける運動量変化を表し、次のように書ける[3]。

$$f(x) = -2\pi^{3/2} \eta \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (4)$$

η はビームビームパラメタを表す。 M_0 の式からわかるように、あらかじめ座標をnatural beam sizeに規格化してあるものを使う。

3. 結果

ビームビーム相互作用を受ける粒子に振幅の大きい強制振動を与える。強制振動の振動数を下からと上からスキャンしたものが図2のヒステリシスとなって現れる。図2の青のライン、青のプロットは強制振動の振動数を小さい方からスキャンしたもので、赤のライン、赤のプロットは上からスキャンしたものである。スキャンするときの粒子の初期条件は常にフェイズスペースの0点付近にとることとする。また、 $\eta = 0.1$ 、 $d = 0.01$ とする。

強制振動の振幅が小さい場合はレゾナンスの内側を運動していることを意味する。ただし、強制振動の振幅がよほど小さくない限りヒステリシスは存在する。

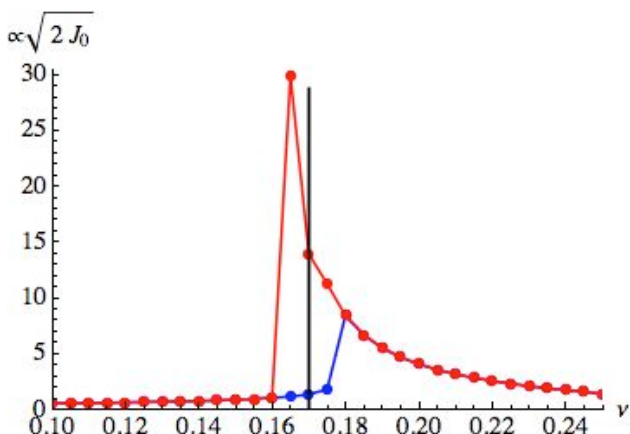


図2. ビームビーム効果によるヒステリシス現象
(横軸は強制振動の振動数 ν の少数部分、
縦軸は粒子の振幅 $\sqrt{2J_0}$ 、 $\nu_0 = 0.16$ $A = 0.8$)

強制振動の振幅が大きすぎるとヒステリシス現象は起きにくくなるが、これは振幅が大きすぎるとビームビーム相互作用が一定となり定数を足していただくだけとなるため、シューンシフトしなくなるためである。

図2の黒線部分に対応一定となりしたフェイズスペースが図3の青、赤のプロットに対応している。緑のプロットは強制振動を与えずに粒子の初期条件を変えたもので、それゆえダンピングは加えていない。

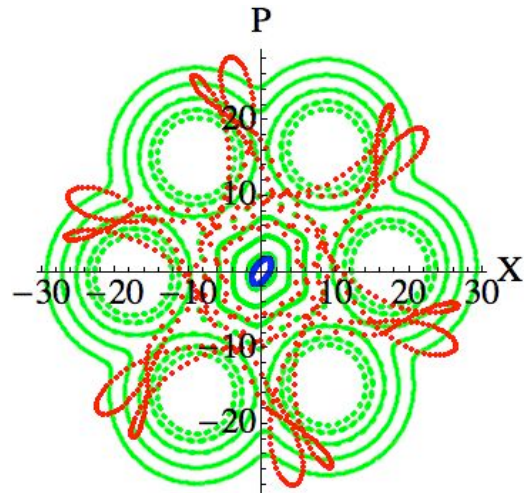


図3. ビームビーム効果の影響を受けた粒子のフェイズスペース ($\nu_0 = 0.16$ $A = 0.8$) (横軸、縦軸はそれぞれ位置と運動量を表す。座標の約1ユニットがビームの大きさに対応している。)

ヒステリシスが存在する、つまり2つの安定状態が存在するとき、粒子の振幅が小さい青のプロットの場合は強制振動のない緑とほぼ同じような運動をしている。しかし、振幅が大きい場合、6次のレゾナンス周りとその内側を行き来しながら運動し、強制振動のない緑とは違う運動をする。

粒子の基本振動数以外同様のパラメータを使い、4次のレゾナンスが存在するような粒子の振動数 $\nu_0 = 0.22$ を調べると、図3と同じように振幅が大きい場合、4次のレゾナンス周りとその内側を行き来するような運動を見つけることが出来る。しかし、ある程度強制振動の振幅を小さくすると、粒子の振幅が一定になるような結果が得られる。このチューンスキャンの結果を図4に示す。さらに、この図の中の黒丸で囲った点のフェイズスペースを図5に示す。色の区別は前の図と同様である。

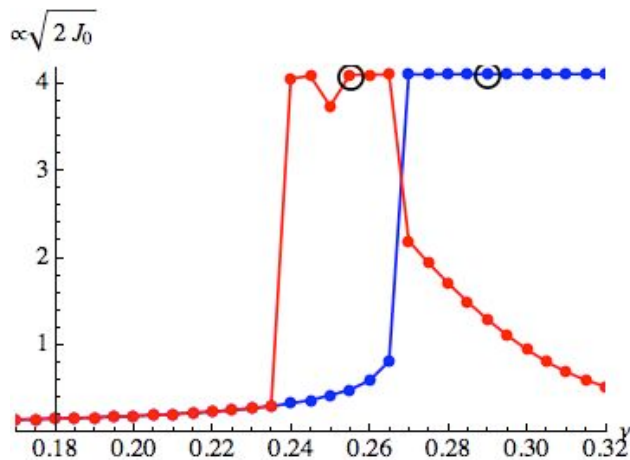


図4. ビームビーム相互作用が存在するときのチューンスキャンの結果 ($\nu_0 = 0.22$ $A = 0.2$)

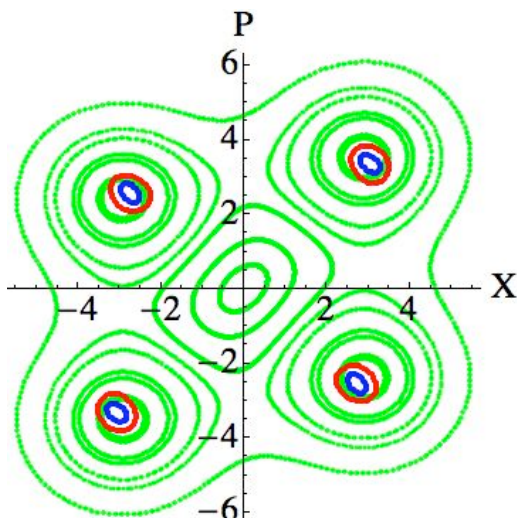


図5. ビームビーム効果の影響を受けた粒子のフェイズスペース ($\nu_0 = 0.22$ $A = 0.2$)

図5から粒子の振幅が一定となっていたのはレゾナンスにトラップされていたためだと分かる。このようにレゾナンスにトラップされた場合、強制振動のない緑のプロットとほぼ一致する。赤のラインはある強制振動の周波数に達したときレゾナンスのトラップから外れるが、青のラインは周波数が0.5に達しても続く。つまりfixed pointにおける振動数と大きく離れた振動数を持った強制振動を与えても依然としてレゾナンスにトラップされているということである。ただし、強制振動の振幅を大きくすると青のラインも赤のライン同様レゾナンスのトラップから外れる。

赤のライン上で周波数が0.25のとき粒子の振幅が小さくなっているが、これは4次のレゾナンスの周波数に一致する強制振動が与えられたためである。この場合、4次のレゾナンスに一致する振動数をもつ強制振動を加えられた粒子は、1つ前の強制振動の振動数でけられた最後の位置から次の4点のみ運動する。そのため、図5赤ラインの内側はfix pointならぬfix areaとなっている可能性がある。先ほどの

最後の位置が0.25のときの振幅を決めるといっている。図4で0.25は小さくなっているが、パラメータの取り方で大きくも小さくもなる。

図3の6次のレゾナンスにおいても4次のレゾナンスのようにトラップされることがある。しかし、図3の6次のレゾナンスの場合、レゾナンスポイントに粒子を持っていくのに大きな強制振動の振幅が必要になるため、初期値をフェイズスペース中心付近に設定した場合トラップされることはほとんどない。

粒子の振幅が一定となる値は強制振動の振幅、振動数によらない。そのため、強制振動を与えないときの粒子の運動のみで決まる値である。つまり、強制振動によってレゾナンスポイントは変わらないことを意味する。

4. 議論と結論

強制振動の振幅が小さい場合にもヒステリシスは存在するが、フェイズスペースの様子は図3の青のように、中心付近のレゾナンスの中で大きさだけの違うトラジェクトリーを描く。

強制振動の振幅が大きいときには振幅が小さいときには起こりえない様々な現象が起こる。それは図3で見たような一風変わった運動を起こすこと、さらに、場合によっては大きなレゾナンスにトラップされてしまい、少々強制振動の振動数を変えても振幅はほとんど変わらないこともある。

チューンスキャンはビームに対してアクティブに行える数少ない測定の一つであり、チューンの測定以外にも系の非線形性を調べるための有益な方法である可能性がある。

参考文献

- [1] Kohji HERATA “COHERENT BETATRON OSCILLATION MODES DUE TO BEAM-BEAM INTERACTION”, NIM A269 (1988) 7-22
- [2] Takao Ieiri and Kohji Hirata “OBSERVATION AND SIMULATION OF NONLINEAR BEHAVIOR OF BETATRON OSCILLATIONS DURING THE BEAM-BEAM COLLISION”, PAC 1989 709-711
- [3] 平田光司 加速器とビームの物理 岩波 p60